

УДК 330.4

**Рисцов Ігор Костянтинович**

*доктор фізико-математичних наук,  
доцент кафедри економічної кібернетики  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

**Rystsov Igor**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*

*ORCID: 000-0001-6002-0503*

## **МАКРОЕКОНОМІЧНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ**

## **MACROECONOMIC DYNAMIC MODELS**

***Анотація.** Вступ. Стаття присвячена опису двох макроекономічних моделей, а саме моделям Кейнса і Самуельсона-Хікса, які показують як ВВП (валовий внутрішній продукт) рухається до положення рівноваги. Рівноважний ВВП виникає тоді, коли загальна кількість виробленої продукції (сукупна пропозиція) дорівнює загальній кількості продукції, яку можна купити (сукупний попит). В основі визначення рівноважного ВВП лежать заплановані сукупні витрати, які є грошовим еквівалентом сукупного попиту. Згідно з теорією Кейнса [1, 2] рівноважний ВВП є таким обсягом виробленої продукції, який дорівнює запланованим сукупним витратам. Якщо ВВП більше запланованих сукупних витрат, то це свідчить про виникнення перевиробництва, яке супроводжується незапланованим збільшенням товарних запасів, що спонукає підприємства скорочувати ВВП до рівноважного обсягу. Якщо ВВП менше запланованих сукупних витрат, то це є ознакою недовиробництва, яке супроводжується*

незапланованим зменшенням товарних запасів, що спонукає підприємства збільшувати ВВП до рівноважного обсягу.

Природним для економіки є виробничий цикл, період якого складає один рік, тому в роботі розглядаються дискретні версії моделей Кейнса.

*Мета.* Моделі Кейнса і Самуельсона-Хікса давно стали класичними і увійшли до підручників. Тому метою автора було проведення більш детального аналізу цих динамічних моделей і різних сценаріїв руху ВВП до положення рівноваги. Для цих моделей автором проводилось також дослідження асимптотичної стійкості розв'язків.

*Методи.* Основні результати отримані на основі теорії різницевих рівнянь [3], а також загальних логічних і математичних методів доведення результатів.

*Результати.* Проведений детальний аналіз поведінки ВВП в часі в моделі Кейнса в залежності від початкового стану, як в умовах перевищення попиту над пропозицією, так і навпаки. Для моделі Самуельсона-Хікса надане повне доведення асимптотичної стійкості його розв'язку, якщо коефіцієнт акселерації менше одиниці. Звісно, що ці результати мають в основному методичний характер.

**Ключові слова:** макроекономічні моделі, модель Кейнса, модель Самуельсона-Хікса.

**Summary.** *Introduction.* The article is devoted to the description of two macroeconomic models, namely the Keynes and Samuelson-Hicks models, which show how the GDP (gross domestic product) moves to the equilibrium position. Equilibrium GDP occurs when the total amount of output produced (aggregate supply) equals the total amount of output that can be bought (aggregate demand). The basis for determining the equilibrium GDP is the planned aggregate expenditure, which is the monetary equivalent of aggregate demand. According to the theory of Keynes [1, 2], the equilibrium GDP is the volume of production

*that is equal to the planned total costs. If the GDP exceeds the planned total costs, this indicates the occurrence of overproduction, which is accompanied by an unplanned increase in commodity stocks, which prompts enterprises to reduce GDP to the equilibrium volume. If the GDP is less than the planned total costs, then this is a sign of underproduction, which is accompanied by an unplanned decrease in commodity stocks, which prompts enterprises to increase GDP to the equilibrium volume.*

*A production cycle with a period of one year is natural for the economy, so the paper considers discrete versions of Keynes' models.*

*Purpose. The Keynes and Samuelson-Hicks models have long since become classics and have entered textbooks. Therefore, the author's goal was to carry out a more detailed analysis of Keynes' dynamic model and various scenarios of the movement of GDP towards equilibrium. In the Samuelson-Hicks model, the asymptotic stability of the solution was investigated, which was usually declared, but not proved.*

*Methods. The main results are obtained on the basis of the theory of difference equations [3], as well as general logical and mathematical methods of proving the results.*

*Results. A detailed analysis of the behavior of GDP over time in the Keynesian model is carried out, depending on the initial state, both in conditions of excess demand over supply, and vice versa. For the Samuelson-Hicks model, a complete proof of the asymptotic stability of its solution is proved if the acceleration coefficient is less than unity. Of course, these results are mainly methodological in nature.*

**Key words:** *macroeconomic models, Keynes model, Samuelson-Hicks model.*

**Постановка проблеми.** У моделі Кейнса агрегованими економічними агентами виступають домогосподарства, бізнес і держава (у вигляді уряду).

Ця модель описується системою з двох рівнянь. Перше рівняння – це рівняння планованих витрат, тобто сума грошей, яку економічні агенти планують витратити на товари та послуги. Позначимо плановані витрати у період часу  $n$  як  $e_n$ . Ці витрати складаються із споживання домогосподарств  $c_n$ , інвестиції бізнесу  $i_n$  та державних витрат  $g_n$ . Звідси отримаємо перше рівняння моделі для всіх чисел  $n \geq 0$ :

$$e_n = c_n + i_n + g_n . \quad (1)$$

Основною змінною в моделі є валовий внутрішній продукт (ВВП), який позначимо як  $y_n$ . Кейнс розглядав модель закритої економіки, тобто економіки, що перебуває у стані автаркії, коли відсутня взаємодія із зовнішнім світом. У цьому випадку всі суспільні потреби мають задовольнятися за рахунок внутрішніх економічних ресурсів. Тому в стані рівноваги сукупний дохід має дорівнювати планованим витратам. Звідси отримуємо друге рівняння моделі для всіх цілих чисел  $n \geq 0$ :

$$y_n = e_n . \quad (2)$$

Тоді із рівнянь (1) і (2) отримуємо рівняння, яке зв'язує дохід і витрати:

$$y_n = c_n + i_n + g_n . \quad (3)$$

Кейнс вважав, що функція споживання  $c_n$  в наступному періоді є лінійною функцією від ВВП поточного періоду, звідки отримуємо таке рівняння моделі для всіх цілих чисел  $n \geq 0$ :

$$c_{n+1} = m \cdot y_n + c_0 , \quad (4)$$

де  $c_0$  – мінімальний обсяг споживання. Коефіцієнт пропорційності  $m$  Кейнс назвав граничною схильністю до споживання (marginal propensity to consume). Із економічного змісту випливає, що коефіцієнт пропорційності  $m$  задовольняє таким умовам:

$$0 < m < 1 . \quad (5)$$

Дійсно,  $m > 0$ , оскільки споживання зростає зі зростанням доходу, а з іншого боку  $m < 1$ , оскільки частина коштів накопичується.

Щоб зробити модель простішою, Кейнс припустив, що рівень інвестицій та державних витрат є постійним, що для короткого проміжку часу узгоджується з реальністю. Звідси отримуємо такі співвідношення:

$$i_n = i_0, \quad g_n = g_0, \quad (6)$$

де обидві константи  $i_0$  і  $g_0$  є зовнішніми параметрами моделі. Підставивши співвідношення (4) і (6) у рівняння (3), отримаємо таке різницеве рівняння:

$$y_{n+1} = m \cdot y_n + d_0, \quad (7)$$

де  $d_0 = c_0 + i_0 + g_0$ . Константу  $d_0$  можна розглядати як мінімальне можливе значення ВВП. Рівняння (7) називається лінійною дискретною динамічною моделлю Кейнса.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Лінійна модель Кейнса зустрічається в багатьох публікаціях [4-10], але без детального аналізу різних сценаріїв руху ВВП до рівноваги. Твердження о стійкості при певних умовах розв'язку в моделі Самуельсона-Хікса можна знайти в [4], але по суті без доведення. Інші математико-економічні моделі розглядаються в роботі [3].

**Метою статті** є проведення детального аналізу поведінки ВВП в часі в моделях Кейнса і Самуельсона-Хікса в залежності від початкового стану і різних сценаріїв руху ВВП до рівноважного положення. В цих моделях представляє інтерес також досліджування асимптотичної стійкості розв'язків.

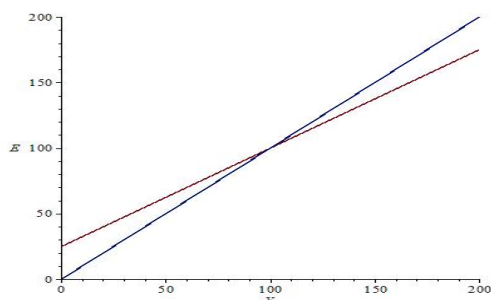
**Методи.** Основні результати отримані на основі теорії різницевого рівнянь [3], а також загальних логічних і математичних методів доведення результатів.

**Виклад основного матеріалу.** Різницеве рівняння (7) є лінійним неоднорідним рекурентним співвідношенням першого порядку. Згідно із загальним методом розв'язання таких рівнянь, потрібно знайти один його частковий розв'язок, а також загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Тому спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння (7), в

якості якого візьмемо його стаціонарний розв'язок (нерухому точку)  $y_E$ , якій можна знайти з рівняння  $y_E = m \cdot y_E + d_0$ . Звідси маємо:

$$y_E = \frac{d_0}{1 - m} \quad (8)$$

Зауважимо, що із умов (5) і (8) випливає нерівність  $d_0 < y_E$ . Точку  $y_E$  можна знайти і графічно, як точку перетину графіку прямої  $e = m \cdot y + d_0$  з бісектрисою  $e = y$ . Оскільки  $m < 1$ , то ці дві прямі перетинаються. Отримана конфігурація називається "кейнсіанським хрестом" [2] (рис. 1).



**Рис. 1. Кейнсіанський хрест**

*Джерело:* розробка автора

Нехай початковий стан ВВП дорівнює  $y_0$  тоді рівняння (7) має єдиний розв'язок, який у даному випадку можна знайти індукцією за натуральним числом  $n \geq 1$ :

$$y_n = y_0 \cdot m^n + d_0 \sum_{i=0}^{n-1} m^i \quad (9)$$

Із рівняння (8) маємо:

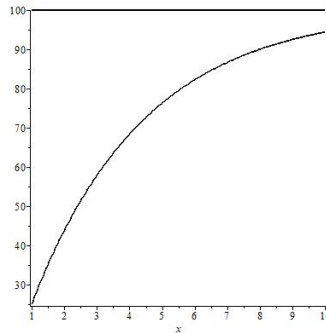
$$d_0 \sum_{i=0}^{n-1} m^i = y_E (1 - m) \sum_{i=0}^{n-1} m^i = y_E - y_E \cdot m^n \quad .$$

Тоді із (9) отримуємо розв'язок в моделі Кейнса у більш зручному вигляді:

$$y_n = y_E + (y_0 - y_E) \cdot m^n \quad (10)$$

Оскільки  $m^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то в моделі Кейнса ВВП плавно прямує до свого положення рівноваги. Якщо  $y_0 < y_E$ , то ВВП прямує знизу (рис. 2)

і якщо  $y_0 > y_E$ , то зверху. У будь-якому випадку горизонтальна пряма, що проходить через нерухому точку буде асимптотою розв'язку (10).



**Рис. 2. Економічна динаміка в моделі Кейнса**

*Джерело:* розробка автора

Перший сценарій може реалізуватися, коли, наприклад, ВВП мінімальний, тобто  $y_0 = d_0$ . Другий випадок може з'явитися, коли інвестиції  $i_0$ , або урядові витрати  $g_0$  різко зменшаться і залишаться постійними.

Таким чином, модель Кейнса відображає ідеальну картину, коли економіка поступово наближається до свого стабільного значення. Дивовижно, але статистичні дані свідчать, що економіки багатьох країн на короткому проміжку часу рухаються за Кейнсом, що свідчить про практичну корисність його моделі.

Послідовники Кейнса неодноразово намагалися удосконалити його модель. Зокрема, його учні Самуельсон і Хікс ввели в модель змінні інвестиції. Вони припустили, що бізнес буде збільшуватиме інвестиції, якщо збільшиться ВВП за минулий період. Таким чином, вони дійшли до такого співвідношення:

$$i_{n+2} = a \cdot (y_{n+1} - y_n) + i_0, \quad (11)$$

де  $a$  — коефіцієнт акселерації, а  $i_0$  — початкові (або базові) інвестиції.

Покладемо  $b = a + m$ , тоді, підставляючи співвідношення (4) і (11) до рівняння (3), у припущенні постійних урядових видатків  $g_n = g_0$  отримаємо співвідношення, яке називається рівнянням Самуельсона-Хікса:

$$y_{n+2} = b \cdot y_{n+1} - a \cdot y_n + d_0, \quad (12)$$

де  $d_0 = c_0 + i_0 + g_0$  – ВВП з мінімальним споживанням. Співвідношення (12) є лінійним неоднорідним різницеvim рівнянням другого порядку. Спочатку знайдемо його стаціонарний розв'язок  $y_E$  (нерухому точку), який буде таким же, як і в моделі Кейнса:

$$y_E = \frac{d_0}{1 - b + a} = \frac{d_0}{1 - m}. \quad (13)$$

Потім знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $y_{n+2} = b \cdot y_{n+1} - a \cdot y_n$ . Його характеристичним рівнянням буде квадратне рівняння  $x^2 - bx + a = 0$ . Корені цього рівняння виражаються формулами:

$$r_1 = \frac{b - \sqrt{D}}{2}, \quad r_2 = \frac{b + \sqrt{D}}{2}. \quad (14)$$

де  $D = b^2 - 4a$  – дискримінант характеристичного рівняння. Розглянемо декілька окремих випадків формули (14) в залежності від значення дискримінанту  $D$ .

Якщо  $D > 0$ , то обидва корені будуть дійсними, і тоді загальний дійсний розв'язок рівняння (12) згідно з теорією різницеvim рівнянь [5] має такий вигляд для всіх чисел  $n \geq 0$ :

$$y_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n + y_E, \quad (15)$$

де константи  $C_1, C_2$  залежать від початкових значень ВВП  $y_0, y_1$ .

Якщо  $D = 0$ , то у характеристичного рівняння буде мати один дійсний кратний корінь  $r_1 = r_2 = b/2$ . В цьому разі загальний дійсний розв'язок рівняння (12) має такий вигляд для всіх цілих чисел  $n \geq 0$ :

$$y_n = (C_1 + C_2 \cdot n) \cdot r_1^n + y_E. \quad (16)$$

Якщо  $D < 0$ , то обидва корені квадратного рівняння будуть комплексними і спряженими один до одного. У цьому разі загальний дійсний розв'язок рівняння (12) має такий вигляд для всіх  $n \geq 0$ :

$$y_n = C_1 \cdot r^n \cos(n\varphi) + C_2 \cdot r^n \sin(n\varphi) + y_E, \quad (17)$$



де  $r = \sqrt{b^2 + |D|}/2$  – модуль коренів (14), а  $\varphi = \arctg(\sqrt{|D|}/b)$  – аргумент одного з коренів. Має місце така теорема.

**Теорема 1.** Якщо  $a < 1$ , то положення рівноваги  $y_E$  буде стійким у моделі Самуельсона-Хікса, тобто  $y_n \rightarrow y_E$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** Якщо  $D = 0$ , то із умов  $a < 1$  і  $m < 1$  випливає така нерівність:

$$r_1 = \frac{b}{2} = \frac{a + m}{2} < 1 .$$

Тоді, із формули (16) слідує заключення теореми, оскільки  $n \cdot r_1^n \rightarrow 0$ , при  $r_1 < 1$  і  $n \rightarrow \infty$ . Таким чином, в цьому випадку теорему доведено.

Нехай  $D > 0$ , тоді із умови  $m < 1$  слідує нерівність  $4am < 4a$  або  $0 < 2am < 4a - 2am$ . Звідси випливає така нерівність:

$$\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4a} = \sqrt{a^2 + 2am + m^2 - 4a} < \sqrt{a^2 - 2am + m^2} = |a - m| ,$$

Тоді із формули (14) отримуємо такі умови:

$$0 < r_1 < r_2 < (a + m)/2 + |a - m|/2 = \max(a, m) < 1 .$$

Отже  $0 < r_1 < r_2 < 1$ , тоді, із формули (15) слідує, що  $y_n \rightarrow y_E$  при  $n \rightarrow \infty$  і теорему в цьому випадку доведено.

Нехай  $D < 0$ , тоді маємо таку нерівність:

$$r = \frac{\sqrt{b^2 + |D|}}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4a - b^2}}{2} = \sqrt{a} < 1 .$$

Отже  $r < 1$ , тоді із формули (17) слідує заключення теореми і тому теорему доведено. □

**Висновки та застосування.** Зазначимо, що навіть, коли  $a < 1$ , характер руху в цій моделі буде складнішим порівняно з моделлю Кейнса. Зокрема, у випадку комплексних коренів із формули (17) видно, що в економіці можуть виникати затухаючі гармонійні коливання навколо положення рівноваги.

Крім того, в реальній економіці коефіцієнт акселерації може бути більшим за одиницю. У цьому разі економіка стає нестійкою і навіть за

постійного припливу інвестицій вона не повертається в положення рівноваги, а періоди підйому чергуються з періодами спаду (кризами).

### Література

1. Keynes J. M. *The General Theory of Employment, Interest and Money*. London: Palgrave Macmillan, 2007. 472 p.
2. Макроекономіка: базовий курс : навч. посіб. / І.Й. Малий, І.Ф. Радіонова, Т.Ф. Куценко, Н.В. Федірко та ін. Київ : КНЕУ, 2016. 253 с.
3. Рисцов І.К. *Динамічні економічні моделі*. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2024. 141 с.
4. Єфимова Г. О., Осадча О. О. *Методичні вказівки по спецкурсу «Математичні моделі макроекономіки» та по курсу «Моделі економічної динаміки»*. Одеса : Одеський національний університет, 2013. 68 с.
5. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. *Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів*. Тернопіль : Богдан, 2006. 304 с.
6. Небава М.І. *Теорія макроекономіки : навч. посібник*. Київ : Слово, 2003. 536 с.
7. Черноусова Ж.Т., Бондар Б.С. *Застосування моделей кейнсіанського та неокласичного типу для моделювання економіко-виробничих процесів підприємств*. *Економічний вісник НТУУ «Київський політехнічний інститут»*. 2023. № 26. С. 161-166.
8. *Моделювання економічної динаміки : навч. посіб.* / Клебанова Т.С. та ін. Харків : Видавничий Дім «ІНЖЕК», 2005. 244 с.
9. Малиш Н.А. *Моделювання економічних процесів ринкової економіки*. Київ : МАУП, 2004. 120 с.
10. Присенко Г. В., Равікович Є. І. *Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посібник*. К. : КНЕУ, 2005. 378 с.

## References

1. Keynes J. M. The General Theory of Employment, Interest and Money. London: Palgrave Macmillan, 2007. 472 p.
2. Macroeconomics: basic course: textbook / I. Y. Maly, I. F. Radionova, T. F. Kutsenko, N. V. Fedirko et al. Kyiv: KNEU, 2016. 253 p. [in Ukrainian].
3. Rystsov I. K. Dynamic economic models. Kyiv: KPI, Polytechnic Publishing House, 2024. 141 p. [in Ukrainian].
4. Efimova G. O., Osadcha O. O. Methodical instructions for the special course "Mathematical models of macroeconomics" and the course "Models of economic dynamics". Odesa: Odesa National University, 2013. 68 p. [in Ukrainian].
5. Ljashenko I. M., Korobova M. V., Stoljar A. M. Fundamentals of mathematical modeling of economic, ecological and social processes. Ternopilj: Boghdan, 2006. 304 p. [in Ukrainian].
6. Nebava M.I. Theory of macroeconomics: textbook. Kyiv: Slovo, 2003. 536 p. [in Ukrainian].
7. Chernousova Z.T., Bondar B.S. Application of Keynesian and neoclassical models for modeling economic and production processes of enterprises. *Economic Bulletin of NTUU "Kyiv Polytechnic Institute"*. 2023. No. 26. P. 161-166. [in Ukrainian].
8. Modeling of economic dynamics: textbook / Klebanova T.S. etc. Kharkiv: INZHEK Publishing House, 2005. 244 p. [in Ukrainian].
9. Malysh N.A. Modeling of economic processes of the market economy. Kyiv: MAUP, 2004. 120 p. [in Ukrainian].
10. Prysenko G. V., Ravikovich E. I. Forecasting socio-economic processes: textbook. K.: KNEU, 2005. 378 p. [in Ukrainian].