Математика

УДК I.1 01.01.06

Ткаченко Іван Семенович
доктор економічних наук, професор
Хмельницький національнийоуніверситет
Tkachenko Ivan
Doctor of Economic Sciences, Professor
Khmelnytskyi National University

ГІПОТЕЗА Л.КОЛЛАТЦА: СОФІЗМ, ПАРАДОКС, РОЗВ'ЯЗАННЯ
HYPOTHESIS OF L. KOLLATZ: SOPHISM, PARADOX, SOLUTION

Анотація. *Показано, які характеристики гіпотези призвели її до визнання арифметичним софізмом та парадоксом. Розв'язанням є пошук в сирaкýзській послідовності S такого її члена, значення якого визначене як* N *комплектів по 3 плюс 1, тобто* $3N+1$ *елементів, які можуть бути пераховані два по два* m *раз без залишку з застосуванням чисел Мерсенна.*

Ключові слова: *гіпотеза, арифметичний софізм, парадокс, тотожність, рівність, роль одиниці, числа Мерсенна.*

Summary. *It is shown what characteristics of the hypothesis led to its recognition as an arithmetic sophism and a paradox. The solution is to search in the Syracuse sequence S for such a member whose value is defined as N sets of 3 plus 1, that is, 3N+1 elements that can be counted two by two m times without a remainder using Mersenne number*

Key words: *hypothesis, arithmetic sophism, paradox, identity, equality, role of unit, Mersenne numbers.*

Вступ та постановка завдання. За задумом Л. Коллатца [1; 2] формується числова послідовність, члени якої будуються у відповідності до наступного алгоритму:

- з множини натуральних чисел обираємо будь-яке N,
- якщо воно парне, то його треба розділити на 2, а
- якщо непарне, то буде помножено на 3 й додана 1, тобто буде $3N + 1$,
- з отриманим числом виконуємо ті ж самі дії що й над попереднім числом,
- цей процес діє доти, поки не отримаємо одиницю.

Сформована таким, на перший погляд, досить спрощеним чином числова послідовність має також і назву *сираку́зської проблема*, або ще й як *дилема* $3N + 1$ та інші, а це свідчить про те, що вона викликала неабияку увагу до вирішення гіпотези Коллатца. Відносна спрощеність сприйняття змісту проблеми спонукає дослідників її розв'язку до пошуку різноманітних альтернативних варіантів та підходів, Одним з таких варіантів може бути сприйняття цієї проблеми як простий *математичний софізм*.

Софізмами зазвичай називають міркування, або уявлення, за якими прихована дотепність, а частіше за все це можуть бути навмисно ретельно приховані досить тонкі, багато значно усвідомлювані висловлювання, або ж просто випадково підмінено деякі ознаки тих чи інших параметрів. Математика досить щедра на софізми, бо серед них існують як алгебраїчні, геометричні, а також трапляються досить цікаві та дотепні начебто прості арифметичні.

Розглянемо гіпотезу Коллатца з точки зору її означення начебто це є арифметичний ***софізм***. Враховуючи те, що арифметика досліджує виконання певних дій над числами, з'ясуємо як можна сприймати математичне висловлювання $3N + 1$. Є два варіанти. Перший: це сприймаємо як 3 помножили на натуральне число N та додати 1, аби результат був парним. Наш вариант передбачає що комплект з 3 елементів було *повторено* N разів і 1 додано щоб отримане значення можно було перерахувати по два, або може й два рази по два, тобто по 4. Яку роль відіграє 1 в цьому випадку? Це є: а) $N = 1$ натуральне число, б) відіграє роль регулятора парності при виконанні арифметичних дій у висловлюванні $3N + 1$, в) у відповідності до суті алгоритму формування послідовності тут ***одиниця*** *виконує роль результату ділення парного числа на 2, тобто* ***завершення операції ділення без залишку***. Певно саме цю ***одиницю*** й мав на увазі Коллатц коли сформулював гіпотезу.

Простий практичний приклад. Нехай $N = 1$. Це відповідає процесу обміну однієї монети номіналом в 3 цента і ще однієї номіналом в 1 цент на дві монети номіналом по 2 центи і ніде ніяких залишків та будь яких зациклювань.

$$3 \cdot 1 + 1 \equiv 2 + 2 = 4.$$

Процедуру обміну завершено.

При виконанні арифметичних дій в подібних випадках доцільно прискіпливо сприймати сутність таких понять як ***рівність*** і ***тотожність***, якщо $A = B$, $a\ B = A, тоді\ A \equiv B\ a\ A - B = 0$. Дійсно, при $N = 1$ маємо

$$A = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \text{ и } B = 2 \cdot 2 = 4, A \equiv B \Rightarrow 4 - 4 = 0,$$

де комплекту A відповідають значения 3 и 1, а комплекту B відповідно 2 та 2, тобто кожний з них дорівнює чотирьом. Цей факт в подальшому має свою особливу вагу у розкритті сутності софізму.

Важливий аспект в даному випадку набуває також така властивість софізму як дотримання порядку виконання арифметичних дій у відповідності до заданого алгоритму, а також визнання його кінцевого результату.

Прослідкуємо на заданих значеннях N формування сираку́зської послідовності у відповідності до заданого алгоритму та з урахуванням правил виконання арифметичних дій з використанням дужок:

$$S = 3N + 1.$$

При $N = 1$ $$3 \cdot 1 + 1 \equiv 4 = 2 \cdot 2 = 2^2,$$

$$S: \{ 1 \}.$$

При $N = 2$ $$\left((2 \div 2) \cdot 3 + 1 \equiv 4 = 2^2\right) \equiv 3 \cdot 1 + 1,$$

цей підхід й призводить до зациклювання дії за алгоритмом, а має бути:

$$(2 \div 2) \equiv 1,$$

$$S: \{ 2,1 \}.$$

При $N = 3$ $$\left(\left(\left(\left(\left((3 \cdot 3 + 1) \div 2\right) \cdot 3 + 1\right) \div 2\right) \div 2\right) \div 2\right) \div 2 \equiv 1.$$

$$S: \{3,10,5,16,8,4,2,1\}.$$

При $N = 4$ $$\left((4 \div 2) \div 2\right) \equiv 1,$$

$$S: \{ 4,2,1 \}.$$

При $N = 5$ $$\left(\left(\left((5 \cdot 3 + 1) \div 2\right) \div 2\right) \div 2\right) \div 2 \equiv 1,$$

$$S: \{ 5,16,8,4,2,1 \}.$$

При $N = 6$ $$\left(\left(\left(\left(\left(\left((6 \div 2) \cdot 3 + 1\right) \div 2\right) \cdot 3 + 1\right) \div 2\right) \div 2\right) \div 2\right) \div 2 \equiv 1$$

$$S: \{6,3,10,5,16,8,4,2,1\},$$

При $N = 7$

$$((((((((((((7 \cdot 3 + 1) \div 2) \cdot 3 + 1) \div 2) \cdot 3 + 1) \div 2) \cdot 3 + 1) \div 2) \div 2) \cdot 3 + 1) \div 2) \div 2) \div 2) \div 2 \equiv 1$$

$$S: \{7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1\}.$$

При $N = 16$ $$\left(\left(\left((16 \div 2) \div 2\right) \div 2\right) \div 2\right) \equiv 1,$$

$$S: \{16,8,4,2,1\}.$$

З наведених прикладів можемо зробити проміжний висновок, що тут присутня певна тотожність при виконанні арифметичних операцій:

$$\underline{2^4 - 1 = (2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) = 16 - 1 \equiv 3 \cdot 5,}$$
$$\underline{3 \cdot 5 + 1 \equiv 2^4 = 16,}$$

яка підкреслює справедливість висновку Коллатца, про те що кінцевим елементом послідовності є ***одиниця*,** але не зосередженість уваги на тому, що це є кінцевий крок у виконанні заданого алгоритму при виконанні дії ділення парного числа на два призвела до створення ситуації, яка називається ПАРАДОКС, бо одиницю використали не як результат ділення парного числа на два без залишку, а як не парне число. що й зациклило алгоритм.

В підтвердження парадоксальності ситуації на допомогу приходять ще й числа Мерсенна [3]:

$$\underline{M = 2^n - 1 \ (n = 1,2,3, \dots)},$$

Для розглянутих прикладів, зокрема, маємо таке число:

$$\underline{M = 2^4 - 1^4 = 2^{2*2} - 1^{2*2} = (2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) = 15.}$$

Отриманий результат з формування сирaку́зської послідовності дає такий підсумок:

АЛГОРИТМ КОЛЛАТЦА

ФОРМУВАННЯ СИРАКУЗСЬКОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

$$S = 3N + 1$$

ЗАВЕРШУЄТЬСЯ ТОДІ, КОЛИ $3N \equiv M$, ТОБТО ІСНУЄ ТОТОЖНІСТЬ

З ЧИСЛОМ МЕРСЕННА $\underline{M = 2^{2m} - 1 \ (m = 1,2,3, \dots)}$

У m-ом ЦИКЛОВІ, КІЛЬКІСТЬ ЯКИХ НЕОБМЕЖЕНО.

Про це свідчать й наступні тотожні перетворення:

$$3N \equiv M, 3N \equiv 2^{2m} - 1, 3N + 1 \equiv 2^{2m} = 4^m, (m = 1,2,3,..)$$

Це означає, що коли наступний елемент сиракузської послідовності приймає значення кратне 4, завжди кінцевим буде одиниця, як і запевняв Л. Коллатц, але він не підкреслив, що це є завершальний крок його алгоритму.

Якщо з множини натуральних чисел обрати наступі числа:

$$N = \frac{2^{2m}-1}{3} \; (m = 1,2,3,..),$$

тобто $N = 1,5,21,85,\ldots$, а тоді сираку́зська послідовність починає на своє завершення формувати з відповідного m-того числа Мерсенна без одиниці, тобто маємо $\underline{2^{2m}}$, *а* далі перетворюється в парні числа аж до кінцевої одиниці:

$N = 5$, $M = \mathbf{15}$, $\mathbf{3N + 1 = 16}$, тобто S: { $16,8,4,2,1$ }.

$N = 21$, $M = \mathbf{63}$, $\mathbf{3N + 1 = 64}$, тобто S: { $64,32,16,8,4,2,1$ }.

$N = 85$, $M = \mathbf{255}$, $\mathbf{3N + 1 = 256}$, тобто S: { $256,128,64,32,16,8,4,2,1$ }.

і зв'язок між послідовностями дає можливість також визначити номер відповідного циклу

$$m = \frac{1}{2} log_2(3N + 1)$$

коли, наприклад, $\underline{m = 64}$, число Мерсенна буде мати таке значення:

$$\underline{M = 2^{128} - 1,}$$

відповідне йому значення для кількості трійок перерахованих по 2:

$$\underline{N = (2^{64} + 1)(2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1),}$$

а елементи сиракузської послідовності будуть відповідно починатися з $\underline{2^{128}}$

$$S: \{ 2^{128}, 2^{64}, 2^{32}, 2^{16}, 2^8, 2^4, 2^2, 2^1, 2^0 \}.$$

Рахували елементи N раз по три й на додаток одиницю додали, а кінцевий результат отримали m раз по чотири. В цьому прикладі маємо ще й додаткове визначення для одиниці: $2^0 = 1$.

Висновки. Гіпотеза Л. Коллатца є дійсно арифметичним софізмом за його ознаками.

Не якісно визначена сутність складових математичного висловлювання $3N + 1$, не сконцентрована увага на чіткості понять рівність і тотожність, невпевнено визначена роль одиниці на різних етапах її використання, що створило ситуацію за ознаками парадоксу.

Розв'язанням є пошук в послідовності S такого її члена, значення якого визначене як N комплектів по 3 плюс 1, тобто $3N + 1$, які можуть бути перераховані (закодовані) два по два m раз без залишку, що тотожно перетинається й числами Мерсена:

$$3N \equiv M, 3N \equiv 2^{2m} - 1, 3N + 1 \equiv 2^{2m} = 4^{m}\ , (m = 1,2,3,..)\ .$$

Проведений аналіз софізму свідчить про підвищення вимог до чіткості і логічності формулювання задач з метою їх вирішення математиками.

Література

1. Гіпотеза Коллатца. *Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії*. URL: https://tinyurl.com/s6utwr36 (дата звернення: 15.03.2024).
2. Stewart I. The Great Mathematical Problems Paperback. 2013. 340 p.
3. Weisstein E. W. Mersenne Number. *Wolfram MathWorld.* URL: https://mathworld.wolfram.com/MersenneNumber.html (дата звернення: 15.03.2024).