Технічні науки

УДК 519.673

Семенчук Андрій Васильович

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

доцент кафедри прикладного програмування та обчислення

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Semenchuk Andrii

PhD, Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Applied Programming and Computing

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

Тимків Дмитро Федорович

доктор технічних наук, професор,

професор кафедри інженерії програмного забезпечення

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Tymkiv Dmytro

Dr. Sc, Professor,

Professor of the Department of Software Engineering

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

Лукач Вікторія Віталіївна

здобувач освіти

Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Lukach Viktoria

Student of the

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ З ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

MATHEMATICAL MODELING IN APPLIED PROBLEMS IN ELECTRICAL ENGINEERING USING DIFFERENTIAL CALCULUS

Анотація. *Створення математичних моделей електричних кіл, зокрема у вигляді диференціальних рівнянь другого порядку, є однією із актуальних сучасних задач електротехніки. Статтю присвячено огляду існуючих математичних моделей розв'язку прикладних задач з електроенергетики із застосуванням диференціального числення. Виокремлено математичний апарат та математичні компетентності, які слугуватимуть додатковим інструментарієм при розв'язуванні задач професійного спрямування з урахуванням набутих знань та умінь. У дослідженні проаналізовано теоретичний та практичний підхід до створення математичних моделей електричних кіл у вигляді диференціальних рівнянь як до однієї з актуальних задач електротехніки. Вдосконалено існуючу модель малих вільних коливань струму в замкненому електричному контурі для коливального контуру за допомогою врахування характеристики якості контуру та множника добротності коливального контуру.*

Ключові слова: *математичне моделювання, диференціальне числення, прикладні задачі електротехніка, математичний апарат, математична реалізація.*

Summary. *Creation of mathematical models of electric circuits, in particular in the form of differential equations of the second order, is one of the urgent modern tasks of electrical engineering. The article is devoted to a review of existing mathematical models for solving applied problems in the power industry using differential calculus. The mathematical apparatus and mathematical competences are singled out, which will serve as additional tools when solving problems of a professional direction, taking into account the acquired knowledge and skills. The study analyzed the theoretical and practical* *approach to the creation of mathematical models of electric circuits in the form of differential equations as one of the current problems of electrical engineering. The existing model of small free current fluctuations in a closed electric circuit for an oscillating circuit has been improved by taking into account the characteristics of the quality of the circuit and the Q factor of the oscillating circuit.*

Key words: *mathematical modeling, differential calculus, applied problems of electrical engineering, mathematical apparatus, mathematical implementation.*

Вступ. Вирішення прикладних задач з електротехніки є важливим питанням професійної підготовки майбутніх фахівців енергетичної галузі [1; 2; 3]. Разом із тим, виникає завдання адаптації навчального матеріалу для реальних потреб галузі шляхом застосування засвоєного математичного апарату при розв'язуванні задач професійного спрямування [4; 5] шляхом математичного і комп'ютерного моделювання.

Тому метою нашого дослідження є вдосконалення математичної моделі малих вільних коливань струму в замкненому електричному контурі для реалізації математичних компетентностей студентами енергетичних спеціальностей при розв'язанні задач професійного спрямування.

Моделювання сьогодні є однією з методологічних основ дослідження складних енергетичних систем. Особливо це стосується випадків, коли технологічний процес або об'єкт управляється за допомогою ЕОМ. У зв'язку з цим математичне моделювання відіграє важливу роль у підготовці інженерів-електромеханіків, оскільки дозволяє поєднувати теоретичну базу з отриманням реальних наукових, прикладних результатів на її основі.

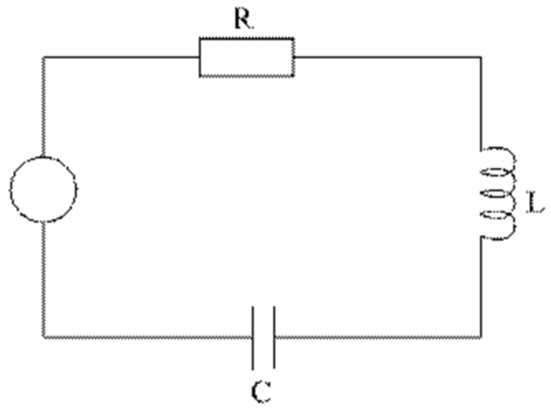
Процес моделювання в електротехніці полягає, зокрема, в розділенні загальної задачі дослідження системи більш прості завдання; вивченні спеціального чисельного прикладу, що відповідає даній задачі; виборі базової математичної моделі, яка може бути вдосконалена відповідно до потреб дослідження [6; 7; 8].

За таких умов важливим є уміння майбутніх спеціалістів здійснювати моделювання прикладної задачі, починаючи з найпростішого рівня, вміння аналізувати й удосконалювати вже існуючі моделі та розв'язки. При цьому слід враховувати взаємозв'язок між частинами курсу вищої математики з реальними потребами майбутніх спеціалістів енергетичної сфери [4].

У проаналізованій літературі не достатньо уваги приділено саме взаємозв'язку операційного числення як складової курсу вищої математики та розв'язуванням прикладних задач з електротехніки як способу перевірки набутих теоретичних знань та умінь майбутнього фахівця. Наша розвідка, фактично, складається з двох частин: теоретичного дослідження та практичної реалізації шляхом розв'язання прикладної задачі з застосуванням диференціальних рівнянь. У процесі дослідження розглянемо та вдосконалимо існуючу модель малих вільних коливань струму в замкненому електричному контурі для коливального контуру за допомогою врахування характеристики якості контуру та множника добротності коливального контуру з урахуванням додаткових характеристик.

Розглянемо простий випадок: коливального контуру. Як відомо, диференціальне рівняння для струму $i(t)$ у коливальному контурі (Рис. 1) має вигляд (1):

$$L = \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt = v(t) \qquad (1)$$



R-опір, L- індуктивність, C- електрорушійна сила

Рис. 1. Схема коливального контуру

Будемо вважати, що в початковий момент струм дорівнює нулю: $i(0) = 0$. Останній член лівої частини рівняння є напруга на обкладках конденсатора; його вираз показує, що при $t = 0$ ця напруга дорівнює нулю, тобто в початковий момент заряди на обкладках конденсатора відсутні. Ці початкові умови відповідають задачам вмикання.

Введемо операторний струм $I(p) \to i(t)$ і операторну напругу $V(p) \to v(t)$. За теоремою диференціювання оригіналу, $\frac{di(t)}{dt} \leftarrow \frac{I(p)}{p}$ тому що $i(0) = 0$, а за теоремою інтегрування $\int_0^t i(t)dt \leftarrow \frac{I(p)}{p}$. Рівняння коливального контуру перепишемо в операторному вигляді (2):

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = V(p) \qquad (2)$$

Звідки

$$I(p) = \frac{V(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} \qquad (3)$$

Де $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ операторний опір контуру.

За знайденим операторним струмом $I(p)$, застосовуючи теорему обернення, можна відновити і сам струм (4):

$$i(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\infty}^{S+i\infty} \frac{V(p)}{Z(p)} e^{pt} dp. \qquad (4)$$

Нехай в коливальний контур включається постійний струм: $V(t) = E$.

Тоді $V(p) = E(p)$ приймає вигляд (5)

$$I(p) = \frac{E}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}} + \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}. \tag{5}$$

Якщо знайти дискримінант виразу $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}$ отримаємо:

1) $\Delta = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0 \qquad i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\sqrt{\Delta}t$

2) $\Delta = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0 \qquad i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}$

3) $\Delta = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} < 0 \qquad i(t) = \frac{E}{L\sqrt{-\Delta}} e^{-\frac{R}{2L}t} \mathrm{sh}\sqrt{-\Delta}t$

Корені тричлена $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}$ рівні $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ вони дійсні та від'ємні. Запишемо операторний струм у вигляді (6):

$$I(p) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \tag{6}$$

Звідси,

$$i(t) = \frac{E}{2l\sqrt{-\Delta}}\left(e^{p2^t} - e^{p2^t}\right)$$

де $p_1 < 0$ і $p_2 < 0$.

Звідси видно, що $i(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

$$V(p) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Зупинимося на ролі інтеграла Дюамеля.

Нехай в контур вмикається постійна одинична напруга $v_1(t) = 1$. Тоді $V_1(p) = \frac{1}{p}$ і за формулою (3)

$$I_1(p) = \frac{1}{pZ(p)}, \text{або } Z(p) = \frac{1}{pI_1(p)}.$$

Якщо тепер в контур включити будь-яку напругу $v(t)$, то

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} = pI_1(p)V(p).$$

За формулою (4)

$$i(t) = v(0) \cdot i_1(t) + \int_0^t v'(\tau) \cdot i_1(t-\tau)d\tau \qquad (i(0) = 0) \qquad (7)$$

Або

$$i(t) = \int_0^t i_1'(\tau) \cdot v(t-\tau)d\tau. \qquad (8)$$

Таким чином, знаючи реакцію контуру на одиничну напругу, ми за допомогою формул (7, 8) зможемо обчислити реакцію контуру на будь-яку зовнішню напругу.

В одержані формули не входять ні зображення напруги $V(p)$, ні, що головне, операторний опір контуру $Z(p)$.

Останнє означає, що ми можемо розрахувати контур, фактично не знаючи його параметрів, якщо тільки експериментально одержали струм $i_1(t)$ – реакцію контуру на одиничну напругу.

Перейдемо до випадку ненульових початкових умов. Будемо вважати, що в початковий момент в контурі є струм $i(0) = i_0$, і що на обкладках конденсатора є початковий заряд q_0. Остання умова приводить до деякої зміни диференціального рівняння контуру, саме, до падіння напруги на конденсаторі треба додати постійний доданок $\frac{q_0}{c}$, і рівняння має вигляд (9):

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int_0^t idt + \frac{q_0}{c} = v(t). \qquad (9)$$

Перейдемо до операторного рівняння і, враховуючи, що тепер $\frac{di}{dt} \leftarrow pI(p) - i_0$, одержимо (10)

$$LpI(p) - Li_0 + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} + \frac{q_0}{Cp} = V(p). \qquad (10)$$

Звідки

$$I(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} + \frac{Li_0 - \frac{q_0}{Cp}}{Z(p)}.$$

де $V(p) \to v(t),$ а $Z(p)$ – операторний опір контуру.

Таким чином, до струму, що визначається операторною формулою $\frac{V(p)}{Z(p)}$, додається ще струм, операторний вираз якого дорівнює

$$\frac{LCi_0 p - q_0}{CpZ(p)}.$$

Цей струм відповідає заданим початковим умовам і зветься струмом короткого замикання. Він одержується, якщо в рівнянні контуру (9) прийняти $v(t) = 0$, тобто накоротко замкнути контур.

Тепер дослідимо малі вільні коливання струму I в замкненому електричному контурі, складеного з послідовно з'єднаних елементів: конденсатора ємності C, котушки індуктивності L і активного опору R (Рис. 2), якщо $I(0) = 0,\ I'(0) = I_0$.

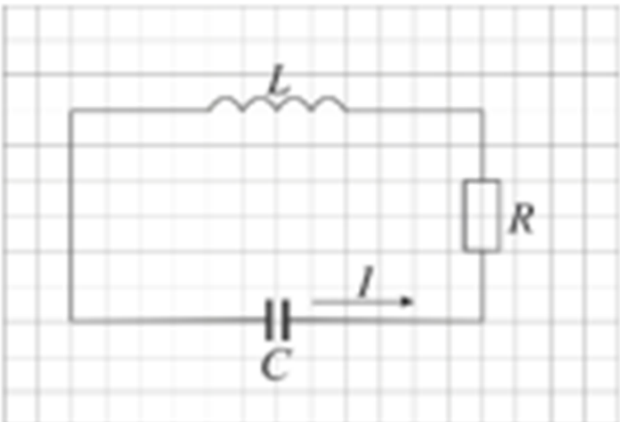


Рис. 2. Замкнений електричний контур

За законом Кірхгофа алгебраїчна сума електрорушійних сил в замкненому контурі дорівнює нулю: $u_l + u_R + u_c = 0$.

Оскільки

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad u_c = -\frac{q}{C} \qquad u_R = \frac{Rdq}{dt} \qquad u_{l=} \frac{Ld^2q}{dt^2}$$

Отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0. \qquad (11)$$

Загальний розв'язок рівняння (11): $I = e^{\frac{Rt}{2L}}(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$, де $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ – частота коливань струму в контурі.

Враховуючи початкові умови, остаточно отримаємо $I = \frac{I_0}{\omega} e^{\frac{Rt}{2t}} \sin \omega t$.

В контурах із слабким затуханням, які застосовуються в радіотехніці, за цей час відбувається велика кількість N коливань. Це число N служить характеристикою якості контуру: $N = \tau/T = L\omega/\pi R = Q/\pi$. Множник $Q = L\omega/R$ називається добротністю коливального контуру.

Висновки. У процесі нашого дослідження вдосконалено існуючу модель малих вільних коливань струму в замкненому електричному контурі для коливального контуру за допомогою врахування характеристики якості контуру та множника добротності коливального контуру.

Література

1. Бірюкова Т. В., Сукач Т. М. Яровий І. М. Застосування диференціальних рівнянь у формуванні професійних компетентностей у здобувачів вищої та передвищої освіти. *Вісник університету імені Альфреда Нобеля.* 2020. № 2(20). С. 141-150.
2. Лісова С. В. Компетентнісний підхід у вищій освіті: зарубіжний досвід. *Професійна педагогічна освіта: компетентнісний підхід: монографія;* за ред. О. А. Дубасенюк. Житомир, 2011. С. 34-53.
3. Сукач Т. М., Чуйков А. С., Бірюкова Т. В. Застосування визначеного інтеграла у формуванні професійних компетентностей здобувачів вищої та передвищої освіти. *Вісник університету імені Альфреда Нобеля.* 2020. № 1(19). С. 289-299.

4. Ворона Р. В. Визначений інтеграл у прикладних задачах з електротехніки. *Матеріали XIV Всеукраїнської студентської науково-технічної конференції «Сталий розвиток міст».* Харків, 2021. URL: http://eprints.kname.edu.ua/61585/ (дата звернення:01.06.2023)
5. Джигирнюк О., Гарбусєв Г. Застосування методу Фур'є в задачах електротехніки. Збірник тез конференції III Міжнародної студентської науково-технічної конференції "Природничі та гуманітарні науки. Актуальні питання". Тернопіль, 2020. С. 19-20. URL: http://surl.li/hhmdt (дата звернення: 02.06.2023)
6. Чорний І., Листопад В., Шоха В. Застосування диференціальних рівнянь в електротехніці. URL: http://surl.li/hhmeh (дата звернення: 30.05.2023)
7. Поляков М. Г., Фомичова Л. Я., Сушко С. О. Математичні основи теоретичної електромеханіки: навчальний посібник. Дніпропетровськ, 2001. 210 с.
8. Кириленко О. В., Сегеда М. С., Буткевич О. Ф., Мазур Т. А. Математичне моделювання в електротехніці : підручник. Львів, 2010. 608 с.