Педагогічні науки

УДК 378:519.2

Жумік Оксана Василівна

кандидат фізико-математичних наук

Львівський національний університет імені Івана Франка

Жумик Оксана Васильевна

кандидат физико-математических наук

Львовский национальный университет имени Ивана Франко

Zhumik Oksana

Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Ivan Franko National University of Lviv

ДО ПИТАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ПІДВИЩЕНОГО РІВНЯ СКЛАДНОСТІ

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

ON THE ISSUE OF SOLVING TASKS IN THE THEORY OF PROBABILITY OF AN INCREASED LEVEL OF COMPLEXITY

Анотація. *Задачі з теорії ймовірностей є складовою частиною олімпіад з математики і часто викликають значні труднощі у студентів, у порівнянні з задачами з інших розділів математики.*

У статті розглянуто декілька підходів до розв'язування олімпіадних завдань з теорії ймовірностей, зокрема, комбінаторний метод, метод введення випадкових величин і метод знаходження ймовірності події із застосуванням функції розподілу випадкової величини. Обґрунтовано доцільність застосування цих методів у кожному конкретному випадку, *зроблені висновки про можливість використання наведених підходів для відшукання розв'язку для ряду інших завдань.*

Ключові слова: *ймовірність випадкової події, випадкова величина, функція розподілу.*

Аннотация. *Задачи по теории вероятностей являются составной частью олимпиад по математике и часто вызывают значительные трудности у студентов по сравнению с задачами из других разделов математики.*

В статье рассмотрено несколько подходов к решению олимпиадных задач по теории вероятностей, в частности комбинаторный метод, метод ввода случайных величин и метод нахождения вероятности события с применением функции распределения случайной величины. Обоснована целесообразность применения этих методов в каждом конкретном случае, сделаны выводы о возможности использования приведенных подходов для поиска решения для ряда других задач.

Ключевые слова: *вероятность случайного события, случайная величина, функция распределения случайной величины.*

Summary. *Problems in the theory of probability are an integral part of Olympiads in mathematics and often cause significant difficulties for students compared to problems from other branches of mathematics.*

The article considers several approaches to solving Olympiad problems in probability theory, in particular, the combinatorial method, the method of entering random variables and the method of finding the probability of an event using the distribution function of a random variable. The expediency of applying these methods in each specific case is substantiated, conclusions are drawn about the possibility of using the above approaches to find solutions for a number of other problems.

Key words: *probability of a random event, random variable, distribution function of a random variable.*

Методи розв'язування завдань підвищеного рівня складності з теорії ймовірностей базуються на глибокому знанні комбінаторики, теорем теорії ймовірностей, розумінні теоретичних основ теорії випадкових подій та їх характеристик.

Труднощі при розв'язуванні таких завдань можуть виникати навіть на етапі розуміння умов задач і зумовлені різноманітністю підходів до розв'язання. Часто виникає неможливість оцінити правильність дій на кожному етапі знаходження відповіді, невміння здійснити одночасний аналіз багатьох випадкових подій і процесів і розглянути всі можливі випадки, невміння абстрагуватися і зробити правильні висновки . У багатьох студентів відсутні навики у розв'язанні складних задач з теорії ймовірностей.

У статті наведені нестандартні підходи до розв'язування завдань, зроблені висновки про можливість використання наведених підходів для відшукання розв'язку до ряду аналогічних завдань.

У наступному прикладі використаємо комбінаторний метод, продемонструємо, як вміння переформулювати завдання значно полегшує відшукання підходу до розв'язання, сам процес розв'язання і дає можливість краще зрозуміти і пояснити алгоритм відшукання розв'язку.

Приклад 1: Сейф, на кодовому замку якого виставлено трицифровий вісімковий код, відкриється, коли принаймні, дві цифри виставлені правильно. Якої мінімальної кількості комбінацій буде достатньо, щоб гарантовано відчинити сейф?

Розв'язання: Дану задачу можна переформулювати наступним чином: яка найменша кількість «тривимірних» шахових фігур тура може контролювати «тривимірне» шахове поле розміру $8 \times 8 \times 8$?

Розв'яжемо задачу у загальному випадку. Розглянемо куб розміру $n \times n \times n$. Спочатку покажемо, як розставити m^2 тур у тривимірному кубі розміру $m \times m \times m$, щоб вони контролювали все поле. Поставимо у клітинку фігуру тоді і тільки тоді, коли сума координат клітинки є числом, кратним m. Зрозуміло, що якщо зафіксувати два числа від 1 до m, то завжди знайдеться однозначно третє число від 1 до m, таке, що сума цих трьох чисел ділиться на m. Для такої розстановки потрібно m^2 фігур. Дана розстановка володіє наступною властивістю: якщо даний куб міститься у кубі більшого розміру, то тури, розставлені у кубі наведеним вище способом контролюють не тільки весь менший куб, а ще й всі лінії більшого куба, які мають з меншим непустий перетин.

Якщо $n = 2m$ – парне число, поділимо куб на 8 однакових кубиків з ребром m. Розставимо наведеним вище способом тури у двох кубах з ребром m однією з вершин одного з яких є точка $(0; 0; 0)$, а вершиною іншого є точка $(m; m; m)$. Розставлені тури будуть контролювати весь куб розміру $(n; n; n)$. Для такої розстановки потрібно $2m^2 = \frac{n^2}{2}$ тур. Якщо ж $n = 2m + 1$ – непарне число, то аналогічно розглянемо два кубики розмірами m та m+1. Для розстановки потрібно буде $m^2 + (m + 1)^2 = 2m^2 + 2m + 1 = \frac{n^2+1}{2}$ фігур. Таким чином у обох випадках достатньо буде $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ тур, де $[\cdot]$ означає цілу частину числа.

Тепер покажемо, що меншої кількості тур буде недостатньо для контролю всього поля. Серед шарів трьох напрямків розглянемо такий, де знаходиться мінімальна кількість тур, яка рівна m. Без обмеження загальності можна вважати, що фігури знаходяться у межах квадрата розміру $m \times m$. При цьому виникне квадрат розміру $(n - m) \times (n - m)$, поля якого не контролюються турами. Його поля повинні контролювати тури з інших шарів. Їх не менше, ніж $(n - m)^2$. Отже, отримаємо не менше, ніж $m^2 + (n-m)^2 \geq \left(\frac{m+(n-m)}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{n^2}{2}$, згідно з нерівністю між середнім квадратичним і середнім арифметичним. Отже, необхідно не менше, ніж $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ фігур.

Задача розв’язана для загального випадку. У випадку вісімкового коду для відкриття сейфу мінімальна кількість комбінацій, яка гарантує відкривання сейфу рівна 32.

У наступній задачі, яка є узагальненням класичного завдання про зустріч двох людей, що розв’язується з використанням геометричної ймовірності, використано підхід із застосування випадкових величин і їх числових характеристик. Потрібно зазначити, що у випадку зустрічі більше ніж двох людей класичний геометричний підхід викликає значні труднощі.

Приклад 2. («Задача про зустріч») Три людини домовилися про зустріч з 12 до 13 години. Кожен учасник експерименту приходить у випадковий момент часу і чекає тих, хто ще не прийшов не більше 30 хвилин. Яка ймовірність, що всі троє зустрінуться?

Розв’язання: Розглянемо випадкові величини X, Y, Z – моменти приходу людей на місце зустрічі. Випадкові величини є незалежними рівномірно розподіленими на проміжку $[0; 1]$. Введемо випадкову величину W=min$\{$X, Y, Z$\}$. Знайдемо функцію та щільність розподілу випадкової величини W. Якщо $t \in [0; 1]$, отримуємо:

$$F(t) = P(W < t) = P\big((X < t) + (Y < t) + (z < t)\big) =$$

$$1 - p\big((X > t) \cdot (Y > t) \cdot (z > t)\big) = 1 - (1-t)^3.$$

Щільність розподілу знайдемо диференціювання функції розподілу, отримаємо: $f(t) \equiv 3(1-t)^2$. Нехай подія A – зустріч трьох людей, при умові, що кожен після приходу чекає інших не більше, ніж $h < 1$ частину години (в умові задачі $h = \frac{1}{2}$). Використовуючи інтегральну форму теореми про повну ймовірність події, отримаємо:

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|W=t)\cdot f(t)\,dt = 3\int_0^1 P\,(A|W=t)\cdot(1-t)^2\,dt.$$

Обчислимо умовні ймовірності

$$P(A|W=t) = \begin{cases} \dfrac{h^2}{(1-t)^2}; t \in [0;1-h]; \\ 1; t \in [1-h;1] \end{cases}$$

Отже, $P(A) = 3\int_0^{1-h} \frac{h^2}{(1-t)^2}\cdot(1-t)^2\,dt + 3\int_{1-h}^1 (1-t)^2\,dt =$ $3\mathrm{h}^2 - 2h^3\cdot$

При $h = \frac{1}{2}$ отримаємо $P(A) = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{8} = \frac{1}{2}$.

Зазначимо, що цей підхід легко узагальнюється на випадок зустрічі *n* людей. Ймовірність зустрічі у такому разі буде рівною: $P(A) = nh^{n-1} - (n-1)h^n$.

У наступному прикладі також показано застосування випадкових величин та їх числових характеристик, що дає можливість чітко зрозуміти суть завдання і звести процес розв'язування до обчислення сум рядів, що є нескладним завданням.

Приклад 3. («Гра в лотерею»). Проводиться гра в лотерею, у якій гравець кожен день може виграти один з трьох призів. Ймовірність виграшу кожного з призів рівна p $(3p < 1)$. Вона не змінюється від початку гри до виграшу чергового призу. Якщо гравець виграв який-небуть з трьох призів, він не зможе виграти його ще раз. Гра відбувається до тих пір, поки не будуть виграні всі призи. Знайти математичне сподівання.

Розв'язання. Розглянемо три незалежних випадкових величини: X, Y, Z які набувають значень, рівних кількості днів до виграшу першого, другого та третього призів відповідно. Знайдемо закони розподілу цих випадкових величин.

X	1	2	3	…	n	…
P	$3p$	$(1-3p)3p$	$(1-3p)^2 3p$	…	$(1-3p)^{n-1}3p$	…

Y	1	2	3	…	n	…
P	$2p$	$(1-2p)p$	$(1-2p)^2 2p$	…	$(1-2p)^{n-1}2p$	…

Z	1	2	3	…	n	…
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	…	$(1-p)^{n-1}p$	…

Випадкова величина $W = X + Y + Z$ - час гри. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини W. $M(W) = M(X+Y+Z) = M(X) + M(Y) + M(z) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 3p(1-3p)^{n-1} \cdot n + \sum_{n=1}^{\infty} 2p(1-2p)^{n-1} \cdot n + \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \cdot n =$$

$$= -p\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-3p)^n\right)' + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-2p)^n\right)' + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n\right)'\right) =$$

$$= -p\left(\frac{1-3p}{1-(1-3p)} + \frac{1-2p}{1-(1-2p)} + \frac{1-p}{1-(1-p)}\right)'$$

$$= -p\left(\frac{1}{3p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{p} - 3\right)' =$$

$=\frac{1}{3p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{p}$.

Отже, у статті розглянуто декілька методів розв'язування завдань підвищеного рівня складності з теорії ймовірностей, зокрема, комбінаторний метод, метод введення випадкових величин і знаходження ймовірності події із застосуванням функції розподілу випадкової величини.

Наведені приклади застосування запропонованих методів підтверджують важливість досконалого розуміння теоретичних основ предмету, що дає можливість поєднувати різні підходи і методи і безпомилково віднаходити алгоритм розв'язування. Також необхідними є практичні навики, набуті в процесі розв'язування завдань. Розв'язування завдань підвищеної складності на факультативах сприяє розвитку логічного мислення, вміння аналізувати абстрактні процеси, віднаходити вирішення завдань будь-якої складності.

Література

1. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
2. Бордуляк М.Т., Скасків О.Б., Сумик О.М., Чижиков І.Е.. Теореми і задачі теорії ймовірностей: навчальний посібник. Львів : Видавець І.Е.Чижиков. 2013. 175 с.