Технічні науки

УДК 622.692.4

**Тутко Тетяна Феліксівна**
*кандидат технічних наук,*
*доцент кафедри Газонафтопроводів та газонафтосховищ*
*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу*
**Тутко Татьяна Феликсовна**
*кандидат технических наук,*
*доцент кафедры Газонефтепроводов и газонефтехранилищ*
*Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа*
**Tutko Tetyana**
*PhD, Associate Professor of the Department of*
*Gas and Oil Pipelines and Gas and Oil Storage*
*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas*

# ДОДАТКОВЕ ВІБРАЦІЙНЕ НАПРУЖЕННЯ У ТОЧЦІ ПІДВІСУ ШТАНГ ВЕРСТАТА-ГОЙДАЛКИ

# ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ВИБРАЦИОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В ТОЧКЕ ПОДВЕШИВАНИЯ ШТАНГ С ТАНКА-КАЧАЛКИ

# ADDITIONAL VIBRATION STRESS AT THE POINT OF SUSPENSION OF THE ROCKING MACHINE

***Анотація.*** *При насосному видобуванні нафти глибинними плунжерними насосами, що приводяться в рух за допомогою верстатів-гойдалок, в момент початку руху плунжера насоса вверх до штанг прикладене значне інерційне навантаження, спричинене вагою стовпа рідини. По штангах поширюється хвиля розтягу, яка і викликає значне додаткове напруження в точці підвісу штанг. Метою даної статті є визначення величини цього додаткового вібраційного напруження.*

*Диференціальне рівняння вільних коливань стержня, яким є колона штанг, при відповідних початкових і граничних умовах розв’язується методом Фур’є. В результаті отримано функцію пружних коливань колони штанг та величину додаткового вібраційного напруження у точці підвісу штанг. У подальшому отриманий розв’язок порівнюватиметься з відомим розв’язком тієї ж задачі Вірновським, а також досліджуватиметься функція швидкості перерізів штанг у момент початку руху плунжера насоса вверх.*

***Ключові слова:*** *колона штанг, вільні коливання стержня, вібраційне напруження.*

***Аннотация.*** *При насосной добыче нефти глубинными плунжерными насосами, приводящимися в движение с помощью станков-качалок, в момент начала движения плунжерного насоса вверх к штангам приложена значительная инерционная нагрузка, вызванная весом столба жидкости. По штангам распространяется волна растяжения, которая и вызывает значительное дополнительное напряжение в точке подвеса штанг. Целью данной статьи является определение величины этого дополнительного вибрационного напряжения. Дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня, которым является колонна штанг, при соответсвующих начальных и граничных условиях решается методом Фурье. В результате получена функция упругих колебаний колонны штанг и величина дополнительного вибрационного напряжения в точке подвеса штанг. В дальнейшем полученное решение будет сравниваться с известным решением этой же задачи Вирновского, а также будет исследоватся функция скорости сечений штанг в момент начала движения плунжера насоса вверх.*

***Ключевые слова:*** *колонна штанг, свободные колебания стержня, вибрационное напряжение.*

***Summary.*** *When pumping oil by deep plunger pumps driven by rocking machines, at the beginning of the movement of the pump plunger up to the rods applied a significant inertial load caused by the weight of the liquid column. A tensile wave propagates along the rods, which causes significant additional stress at the point of suspension of the rods. The purpose of this article is to determine the magnitude of this additional vibration stress. The differential equation of free oscillations of the rod, which is a column of rods, is solved by the Fourier method under appropriate initial and boundary conditions. As a result, the function of elastic oscillations of the rod column and the magnitude of the additional vibration stress at the point of suspension of the rods. In the future, the obtained solution will be compared with the known solution of the same problem by Virnowski, and the function of the velocity of the cross-sections of the rods at the beginning of the movement of the pump plunger will be investigated.*

***Key words:*** *column of rods, free oscillations of the rod, vibration stress.*

**Вступ.** При насосному видобуванні нафти використовуються плунжерні насоси, приводом для яких служать верстати-гойдалки, що з'єднуються з глибинними насосами за допомогою колони штанг. У момент початку руху плунжера насоса вверх на штанги діє значне інерційне навантаження, спричинене стовпом перекачуваної рідини. Знизу вверх поширюється хвиля розтягу, яка і викликає додаткове напруження. Цією задачею займався Вірновський [1]. Ним одержано результат додаткового вібраційного напруження у точці підвісу штанг.

Метою даної роботи є розв'язок тієї ж задачі, але іншим методом (методом розділення змінних (методом Фур'є) [2]). Постановка задачі така ж як і у Вірновського.

**Основна частина.** Необхідно розв'язати таку крайову задачу

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

початкові та граничні умови задачі

$$u_{/t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}_{/t=0} = \frac{\upsilon x}{l}, \tag{2}$$

$$u_{/x=0} = 0, \quad a^2 \frac{\partial u}{\partial x}_{/x=l} = -ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}_{/x=l}, \tag{3}$$

де $u$ - переміщення перерізів штанг, по яких поширюється хвиля, що спричиняє значне інерційне навантаження; $l$ - довжина колони штанг; $x, t$ - координата перерізів штанг і час від початку руху плунжера насоса вгору (вісь $x$ напрямлена вниз, її початок знаходиться у точці підвісу штанг. Це дозволяє розглядати тільки переміщення перерізів штанг, зв'язані з пружною деформацією, не розглядаючи переміщень штанг як твердого тіла); $a^2 = E/\rho$ - квадрат швидкості поширення хвиль у штангах; $E$ - модуль пружності матеріалу штанг; $\upsilon$ - швидкість руху плунжера у початковий момент відносно верхнього перерізу колони штанг, який приймаємо як закріплений; $m = \frac{\gamma_p (F-f) l}{\gamma f l} \cdot \frac{F-f}{F_1 - f}$; $\gamma_p, \gamma$ - питома вага рідини у свердловині (середнє значення) і матеріалу штанг; $F, F_1, f$ - площі поперечного перерізу плунжера, труб НКТ і штанг.

Якщо штанги здійснюють одне з головних коливань, то

$$u(x,t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha), \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ - власна форма коливань; $p$ - відповідна власна частота коливань.

Підставляємо (4) у (1) і отримуємо рівняння

$$\varphi''(x) = -\frac{p^2}{a^2} \varphi(x) = 0. \tag{5}$$

Позначимо $p^2 / a^2 = \beta^2$, тоді $\varphi''(x) + \beta^2 \varphi(x) = 0$. $(5')$

Розв'язок рівняння $(5')$

$$\varphi(x) = B\cos\beta x + D\sin\beta x. \tag{6}$$

Постійні інтегрування $B$ і $D$, а також власні числа $\beta$ визначаємо із граничних умов. При цьому отримуємо $B = 0$,

$D\left(\dfrac{a^2\beta}{p^2 ml} - tg\beta l\right) = 0$ або

$$tg\beta l = \frac{a^2\beta}{p^2 ml}, \quad tg\beta_k l = \frac{1}{ml\beta_k}. \tag{7}$$

Рівняння (7) – характеристичне, з якого визначаються власні числа $\beta_k$. Після цього власна частота коливань $p_k = a\beta_k$. Для власних форм коливань маємо аналітичний вираз

$$\varphi_k(x) = D_k \sin\beta_k x, \ (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

де $\sin\beta_k x$ - власні функції задачі.

Загальний розв'язок знаходиться за формулою

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t)\sin\beta_k x. \tag{9}$$

Величини $M_k$ і $N_k$ знаходимо при використанні початкових умов. Оскільки у початковий момент $u_{/t=0} = u(x,0) = 0$, то $M_k = 0$. Переходимо до визначення $N_k$. Враховуючи другу початкову умову (2), одержимо

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k N_k \sin\beta_k x. \tag{a}$$

Множимо ліву та праву частини рівняння (а) на $\sin\beta_i x$ та інтегруємо в межах від $0$ до $l$

$$\int_0^l \dot{u}(x,0)\sin\beta_i x dx = \int_0^l \sin\beta_i x\left(\sum_{k=1}^{\infty} a\beta_k N_k \sin\beta_k x\right)dx. \tag{б}$$

Інтеграл зліва буде мати значення

$$\int_0^l \dot{u}(x,0)\sin\beta_i x dx = \frac{\upsilon}{l}\left(\frac{\sin\beta_i l}{\beta_i^2} - \frac{l\cos\beta_i l}{\beta_i}\right).$$

Для інтеграла справа розглядаємо два випадки. Перший випадок, коли $k=i$ і другий випадок, коли $k \neq i$.

Для першого випадку отримуємо

$$\int_0^l a\beta_i N_i \sin^2 \beta_i x dx = a\beta_i N_i \left( \frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \sin 2\beta_i l \right), \tag{10}$$

А для другого випадку ($k \neq i$), використовуючи довідкові результати із [3] і те, що із рівняння (7)

$\beta_i = \dfrac{\cos \beta_i l}{ml \sin \beta_i l}, \quad \beta_k = \dfrac{\cos \beta_k l}{ml \sin \beta_k l}$, одержимо після перетворення

$$\int_0^l \sin \beta_i x \sin \beta_k x dx = -ml \sin \beta_i l \sin \beta_k l. \tag{11}$$

Виходячи з (9) і враховуючи те, що $M_k = 0$, друга початкова умова при $t=0, x=l$ запишеться

$$\dot{u}(l,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a\beta_k N_k \sin \beta_k l. \tag{12}$$

Розпишемо рівняння (6)

$$\frac{\upsilon}{l}\left( \frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2} - \frac{l \cos \beta_i l}{\beta_i} \right) = -ml\, a \sin \beta_i l \sum_{k=1}^{\infty}{}' \beta_k N_k \sin \beta_k l +$$

$$+ a\beta_i N_i \left( \frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \sin 2\beta_i l \right), \tag{13}$$

де штрих під знаком суми означає, що під знаком суми відсутній доданок при $k=i$, який винесено окремо.

Користуючись рівністю (12), можна записати

$$a\sum_{k=1}^{\infty}{}' \beta_k N_k \sin \beta_k l = a\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k N_k \sin \beta_k l - a\beta_i N_i \sin \beta_i l$$

або, враховуючи значення (12), будемо мати

$$a\sum_{k=1}^{\infty}{}' \beta_k N_k \sin \beta_k l = \upsilon - a\beta_i N_i \sin \beta_i l.$$

У такому разі рівність (13) прийме такий вигляд:

$$\frac{\upsilon}{l}\left(\frac{\sin\beta_i l}{\beta_i^2}-\frac{l\cos\beta_i l}{\beta_i}\right)+m\upsilon l\sin\beta_i l=ml\,a\beta_i N_i\sin^2\beta_i l+$$

$$+a\beta_i N_i\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{4\beta_i}\sin 2\beta_i l\right). \qquad (14)$$

З рівняння (7) знаходимо $ml$, підставляємо цей результат у (14) і розв’язуємо його відносно $N_i$. При цьому отримаємо

$$N_i=\frac{4\upsilon}{al}\frac{\sin\beta_i l}{\beta_i^2\left(2\beta_i l+\sin 2\beta_i l\right)}. \qquad (15)$$

У результаті розв’язок задачі виглядає так:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\upsilon}{al}\frac{\sin\beta_k l\sin p_k t\sin\beta_k x}{\beta_k^2\left(2\beta_k l+\sin 2\beta_k l\right)}. \qquad (16)$$

Враховуючи розв’язок задачі (16), додаткове вібраційне напруження у точці підвісу штанг буде

$$\sigma_{BH}=E\frac{\partial u}{\partial x}/_{x=0}=\frac{4\upsilon E}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k l\sin p_k t}{\beta_k l\left(2\beta_k l+\sin 2\beta_k l\right)}. \qquad (17)$$

**Висновки.**

1. Додаткове вібраційне напруження залежить від швидкості точки підвісу штанг $\upsilon$ в момент кінця початкової їх деформації, матеріалу штанг, глибини підвісу насоса та швидкості поширення пружних хвиль у штангах.

2. Мета подальшого дослідження полягає у порівнянні результатів вібраційного напруження отриманого Вірновським і за формулою (17), а також у дослідженні правильності твердження Вірноського, що у кінці періоду початкової деформації штанг швидкості всіх їх перерізів змінюються за лінійним законом (друга формула (2)), оскільки воно не зовсім очевидне.

**Література**

1. Вирновский А.С. Определение максимальной загрузки на наземное глубоконасосное оборудование / А.С. Вирновский // Нефтяное хазяйство. 1947. №2. С. 21-29.
2. Кошляков Н.С. Уравнение в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. М.: Высшая школа. 1970. 720 с.
3. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. М.: Наука, 1971. 1108 с.