Технические науки

УДК 621.3 (075.8)

Моногаров Сергей Иванович
Доцент, кандидат технических наук
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
технологический университет»
Армавирский механико-технологический институт
Пожидаев Никита Константинович
студент, кафедры внутризаводского
электрооборудования и автоматики,
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
технологический университет»
Армавирский механико-технологический институт
Monogarov S. I.
Docent, candidate of technology science,
FGBOU VO «KubanState Technological University»
Armavir Mechanical-Technology Institute
Pozhidaev N.K.
Student, Department of Electrical and intra-plant automation,
FGBOU VO «KubanState Technological University»
Armavir Mechanical-Technology Institute

ТЕОРЕМА ГАУССА В РАСЧЕТЕ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ MATHCAD

THEOREM OF GAUSS TO CALCULATE PROBLEMS TO DETERMINE TENSION WITH THE USE OF MATHCAD

Аннотация: исследованы теоретические вопросы построения графиков с применением MathCad.

Ключевые слова: вектор, плотность заряда, интервал, теорема Остроградского-Гаусса.

К.Ф. Гаусс (1777–1855) выдающийся немецкий математик, астроном и физик в 1839г. предложил теорему, которая устанавливает связь потока вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность со значением заряда q, находящегося внутри этой поверхности.

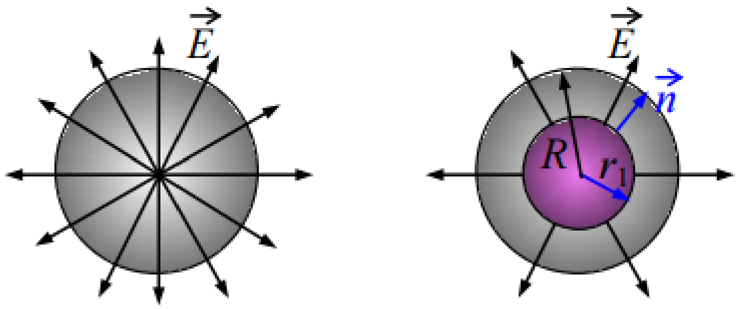
Теорема Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, окружающую заряды (в вакууме), прямо пропорционален алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0

$$\Phi_E = \oint_s (\bar{E} d\bar{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

Для понимания как изменяется напряженность с увеличением расстояния от точечного заряда, аналитически решим задачу и по полученным результатам построим график зависимости E(r)./1/

Заряд равномерно распределен по объему шара радиуса R из непроводящего материала с объемной плотностью заряда ρ. Найдем напряженность поля в точках расположенных на расстояниях: 1) $r_1 < R$; 2) $r_2 > R$.

Поле, созданное таким шаром центрально-симметричное, поэтому напряженность поля можно найдем, используя теорему Гаусса.



1) Поле внутри шара $r_1 < R$. Выберем в качестве замкнутой поверхности S концентрическую сферу радиуса r_1. Найдем заряды, находящиеся внутри поверхности радиуса r_1 через объемную плотность заряда ρ:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V p dV = pV = p\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3$$

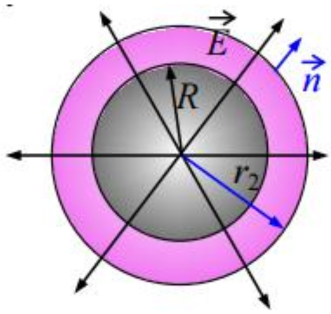
Поток вектора E через поверхность S

$$\oint_S E_n dS = \int_S E \cdot \cos 0\,°dS = ES = E4\pi r_1^2$$

по теореме Гаусса

$$E4\pi r_1^2 = p\frac{4}{3}\pi r_1^3 \quad => \quad E = \frac{p}{3 \cdot \varepsilon_0} r_1$$

2) Поле вне шара $r_2 > R$. Выберем в качестве замкнутой поверхности S′ концентрическую сферу радиуса r_2



Заряды, находящиеся внутри поверхности радиуса r_2

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V p dV = pV = p\frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Поток вектора E через поверхность S'

$$\oint_S E_n dS = \int_S E \cdot \cos 0\,°dS = ES' = E4\pi r_2^2$$

по теореме Гаусса

$$E4\pi r_2^2 = p\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \quad => \quad E = \frac{pR^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r_2^2}$$

Таким образом, получили, что поле внутри равномерно заряженного шара растет линейно с расстоянием r от его центра, поле вне шара – поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда./1/

$$E=\begin{cases} \dfrac{p}{3\cdot\varepsilon_0}r_1, & r<R \\ \dfrac{pR^3}{3\cdot\varepsilon_0\cdot r_2^2}, & r>R \end{cases}$$

Построим график зависимости *E(r)* в MathCad(рисунок 1), для этого исследуем поведение функции при следующих условиях: заряд = 1нКл, радиус = 0.5см./3/

$q := 10^{-9}$ Кл

$R := 0.5\cdot 10^{-2}$ м

Диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 := \dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^9} = 8.842\times 10^{-12}\ \dfrac{Ф}{м}$

Плотность заряда через его заряд $\rho := \dfrac{3\cdot q}{4\pi R^3} = 1.91\times 10^{-3}\ \dfrac{Кл}{м^3}$

График для r<R

Задание интервала из условия r<R $r1 := 0, 10^{-3} .. R$

$$E1(r1) := \frac{\rho\cdot r1}{3\cdot\varepsilon_0}$$

График для r>R

Задание интервала из условия r>R $r2 := R, R+10^{-3} .. 3R$

$$E2(r2) := \frac{\rho\cdot R^3}{3\cdot\varepsilon_0\cdot r2^2}$$

Рис. 1. Аналитическое решение задачи в MathCad

Из полученного решения построен график на рисунке 2.

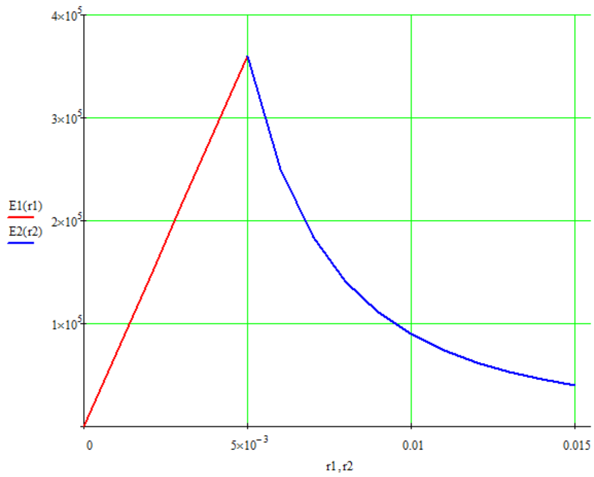


Рис. 2. График зависимости напряженности от расстояния r

В пространстве вокруг электрически заряженного тела существует электрическое поле. Электрическое поле действует на внесенный в него заряд *q* с некоторой силой *F*. В электротехнике интенсивность поля характеризуют напряженностью электрического поля *E*. Под напряженностью понимают отношение силы *F*, действующей на заряженное тело в данной точке поля, к заряду *q* этого тела./2/

С помощью программы MathCad построим график поверхности распределения электрического потенциала и вектор напряжённости электрического поля в области, окружающей заряд. Величины зарядов 1нКл и -1нКл, расстояние между зарядами 0,5м (рисунок 3) и его график (рисунок 4,5)./3/

$Q1 := 10^{-9}$ Кл

$Q2 := -10^{-9}$ Кл

$d := 0.5$ м

Диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 := \frac{1}{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^{9}} = 8.842\times 10^{-12}$ $\frac{Ф}{м}$

Расстояние от заряда до оси ОХ

$$R1(x,y) := \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} \quad м$$

$$R2(x,y) := \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} \quad м$$

Общая формула для электрического потенциала

$$\varphi(x,y) := \frac{Q1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R1(x,y)} + \frac{Q2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R2(x,y)} \quad \frac{Дж}{Кл}$$

Рис. 3. Аналитическое решение задачи в MathCad

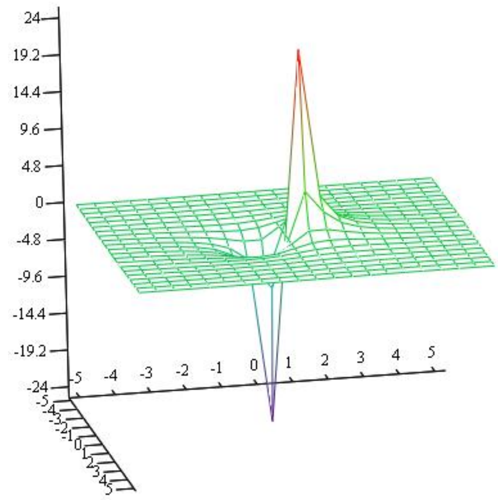


Рис. 4. Вектор напряжённости электрического поля в области

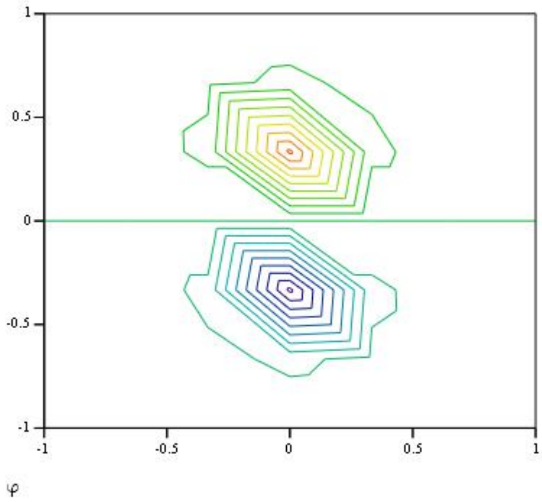


Рис. 5. График поверхности распределения электрического потенциала

На рисунке 5 изображены две поверхности распределения электрического потенциала, верхняя поверхность направлена к нам, центральная линия (красная) показывает максимальную высоту поверхности, оранжевая линия – высота поверхности меньше чем у красной, зеленая линия – поверхность лежит на оси OX. Нижняя поверхность направлена от нас, темно-синяя центральная линия показывает наибольшую высоту поверхности, противоположено верхней поверхности.

Таким образом, с помощью программы MathCad можно аналитическим методом получать графики зависимости напряженности от расстояния, графики поверхности распределения электрического потенциала и вектор напряженности магнитного поля.

Литература:

1. Теорема Остроградского-Гаусса. Применение теоремы Остроградского-Гаусса к расчету полей. http://www.studfiles.ru/preview/3607389/ (дата обращения 13.12.16).
2. Шмелев В.Е., Сбитнев С.А. Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля / Изд-во Владим. гос. ун-та 2003. − 88 с.
3. Гринев А.Ю. Основы электродинамики с Matlab: учеб. пособие / А.Ю. Гринев, Е.В. Ильин. - М.: Логос, 2014. - 176 с.