Физико-математические науки

УДК 517.95

Акимов Андрей Анатольевич
кандидат физико-математических наук,
Стерлитамакский филиал БашГУ
Akimov A.A.
Bashkir state university Sterlitamak branch

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. Рассматривается задача Трикоми для уравнения в смешанной области для уравнения Чаплыгина. Ф. И. Франкль впервые показал, что проблема истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками (внутри сосуда скорость дозвуковая) на плоскости годографа сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина. В работе методом вспомогательных функций получена новая теорема единственности решения этой задачи с условием Франкля в новой области, без каких либо ограничений, кроме гладкости, на эллиптическую часть границы области.

Ключевые слова: метод вспомогательных функций, уравнение Чаплыгина, задача Трикоми, уравнения смешанного типа.

Summary. In this paper we consider the Tricomi problem in a mixed domain for the Chaplygin equation. Frankl was first which showed that the problem of the expiry of a supersonic jet from a vessel with plane walls (inside subsonic speed of the vessel) in the hodograph plane is reduced to the Tricomi problem for Chaplygin equation. In the method of auxiliary functions we received a new theorem of uniqueness of the solution of this problem with the Frankl condition in a new domain, without any restrictions, except the smoothness on the elliptical part of the border domain.

Keywords: method of auxiliary functions, Chaplygin equation of the Tricomi problem, an equation of mixed type.

Рассмотрим уравнение

$$Lv = K(y)v_{xx} + v_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где $K(y)$ достаточно гладкая функция и $yK(y) > 0$ для $y \neq 0$ в области D, которая ограниченна при $y > 0$ гладкой кривой Γ, которая пересекает ось $y = 0$ в точках $A(0,0)$ and $B(l,0), l > 0$, а при $y < 0$ - характеристиками $\gamma_{11} : \xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 0$ и $\gamma_2 : \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = l/2,$ исходящими соответственно из точек $A(0,0)$ и $E(l/2,0)$ и пересекающимися в точке C, а также характеристиками $\gamma_3 : \xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = l/2$ и $\gamma_{41} : \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = l,$ исходящими соответственно из точек $E(l/2,0)$ и $B(l,0)$ и пересекающимися в точке D. Обозначим за D^+ подобласть лежащую при $y > 0$, за D_1^- и D_2^- подобласти лежащие при $y < 0$ и ограниченные соответственно парами характеристик γ_{11}, γ_2 и γ_3, γ_{41}.

В данной статье используя метод «abc», как одну из разновидностей энергетического метода получим достаточные условия единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина.

Задача Трикоми. Найти функцию $v(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$Lv(x,y) \equiv 0, (x,y) \in D_1^- \cup D_2^- \cup D^+; \ v(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C^2(D_1^- \cup D_2^- \cup D_+);$$

$$v|_\Gamma = \varphi(s), \quad 0 \le s \le L; \qquad v|_{\gamma_{11}} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{l}{2}; \qquad v|_{\gamma_{41}} = \psi(x), \quad \frac{l}{2} \le x \le l,$$

где φ и ψ − заданные достаточно гладкие функции.

Предварительно заменим область в гиперболической части на другую. Для этого продолжим характеристики γ_1, γ_4 до их пересечения в некоторой точке O. Полученную область при $y < 0$, ограниченную характеристиками $\gamma_1 = \gamma_{11} \cup \gamma_{12}, \gamma_4 = \gamma_{41} \cup \gamma_{42}$, где γ_{12} часть характеристики CO, а γ_{42} часть характеристики DO, обозначим, как D^-. Будем считать также, что задача

Трикоми для уравнения (1) теперь рассматривается в области $D' = D^{-} \cup D_{+}$ функциия и, что $K(y) \in C[y_o, 0] \cap C^2[y_o, 0),\quad y_o$ − ордината точки O.

Следуя работе Проттера [6], получим доказательство единственности решения задачи (2) − (5) для уравнения (1) в области D', что очевидно равносильно единственности решения в первоначальной области $D = D_1^{-} \cup D_2^{-} \cup D_{+}$.

Определение. *Регулярным решением уравнения* (1) *в области* D *назовем функцию* $v(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C^2(D^{-} \cup D_{+})$ *и к интегралам*

$$\iint_D v L_0 v dxdy,\quad \iint_D v_x L_0 v dxdy,\quad \iint_D v_y L_0 v dxdy$$

можно применить формулу Грина.

Зададим следующую функцию

$$F(y) = 2\left(\frac{K}{K'}\right) + 1.$$

Приведенное ниже утверждение является более общим результатом по сравнению с теоремой 6, приведенной в работе [6].

Теорема. *Пусть* 1) $K(y) \in C^2[y_0, 0),\quad K(0) = 0, K'(y) \neq 0$ *при* $y < 0, F(0) > 0$; 2) *существует постоянная* $d > 0$ *такая, что* $F(y) > -d$ *в области* D_{-}; 3) $v(x,y)$ − *регулярное в* D' *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* $v = 0$ *на* Γ *и* $\gamma_{11} \cup \gamma_{41}$. *Тогда* $v(x,y) \equiv 0$ *в* D.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\iint_D (av + bv_x + cv_y)\left(v_{xx} + \left(\frac{v_y}{K(y)}\right)_y\right) dxdy = 0, \qquad (2)$$

где $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)$ некоторые заданные функции.

Применяя формулу Грина к интегралу (2), аналогично работе [6], получим

$$0 = \iint_D \left[\frac{1}{2}\left(Ka_{xx} + a_{yy}\right)v^2 - a\left(Kv_x^2 + v_y^2\right) - \frac{1}{2}b_x\left(Kv_x^2 - v_y^2\right) - \right.$$

$$-b_y v_x v_y + \frac{1}{2}(Kc)_y v_x^2 - c_x K v_x v_y - \frac{1}{2} c_y v_y^2 \Big] dxdy +$$

$$+ \int_{\Gamma+\gamma_1+\gamma_2} \left[-avv_y + \frac{1}{2} a_y v^2 - b v_x v_y + \frac{1}{2} c\left(K v_x^2 - v_y^2\right) \right] dx +$$

$$+ \left[aKvv_x - \frac{1}{2} a_x K v^2 + cK v_x v_y + \frac{1}{2} b\left(K v_x^2 - v_y^2\right) \right] dy = J_1 + J_2.$$

Пусть решение $v(x, y) = 0$ на Γ и $\gamma_1 \cup \gamma_4$. Зададим в области D^+ функции $b = c \equiv 0.$ Тогда интеграл J_2 в силу равенств

$$dx = -\sqrt{-K}dy\,(\text{на } \gamma_1),\;\; dx = \sqrt{-K}dy\,(\text{на } \gamma_4)$$

запишется в виде:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{\gamma_{11}+\gamma_{12}} (b - c\sqrt{-K})(\sqrt{-K} v_x^2 - 2 v_x v_y + \frac{1}{\sqrt{-K}} v_y^2) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\gamma_{21}+\gamma_{22}} \frac{1}{K}(b + c\sqrt{-K})(\sqrt{-K} v_x^2 + 2 v_x v_y + \frac{1}{\sqrt{-K}} v_y^2) dx -$$

$$- \int_{\gamma_{12}+\gamma_{22}} a\sqrt{-K} v dv - \frac{1}{2}\sqrt{-K} v^2 (a_x dx + a_y dy) = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как $v = 0$ на γ_{11} и γ_{21} то $v_x dx + v_y dy = 0$ вдоль $\gamma_{11} \cup \gamma_{21}$ и, поэтому $I_{11} = I_{21} = 0.$

Интеграл J_1 представим в виде суммы следующих трех интегралов:

$$J_1 = -\iint_{D_+} a\left(K v_x^2 + v_y^2\right) dxdy - \frac{1}{2} \iint_{D_-} \left[\left(2aK + Kb_x - (Kc)_y\right) v_x^2 + 2 v_x v_y \left(b_y + K c_x\right) + \right.$$

$$\left. + \left(2a - b_x + c_y\right) v_y^2 \right] dxdy + \iint \left(K a_{xx} + a_{yy}\right) v^2 dxdy = I_4 + I_5 + I_6.$$

Выберем функции $a(x, y), b(x, y),$ и $c(x, y)$ так, чтобы все интегралы $I_1, I_2, ..., I_6$ или хотя бы их частичные комбинации были неположительны. При $y < 0,$ следуя [6], положим

$$c = \frac{4aK(y)}{K'(y)}, \qquad b = -c\sqrt{-K(y)}. \qquad (3)$$

Интеграл I_1 примет вид

$$I_1 = 4\int\limits_{\gamma_{12}} \frac{a(-K(y))^{\frac{3}{2}}}{K'(y)} (\sqrt{-K} v_x^2 - 2v_x v_y + \frac{1}{\sqrt{-K}} v_y^2) dx$$

Тогда интеграл $I_2 = 0.$ Интегрируя I_3 по частям, будем иметь

$$I_3 = \int\limits_{\gamma_{12}} \left(\sqrt{-K} a_x + a_y + \frac{aK'}{4K} \right) v^2 dx + \int\limits_{\gamma_{22}} \left(\sqrt{-K} a_x - a_y - \frac{aK'}{4K} \right) v^2 dx = I_{31} + I_{32}$$

Интеграл I_3 будет неположительным, если

$$\sqrt{-K} a_x + a_y + \frac{aK'}{4K} \le 0 \quad при \quad y \le 0. \quad (4)$$

$$\sqrt{-K} a_x - a_y - \frac{aK'}{4K} \le 0 \quad при \quad y \le 0. (5)$$

Интеграл I_5 будет неположителен, если

$$(Kc_x + b_y)^2 \le (2a - b_x + c_y)(2aK + Kb_x - (Kc)_y) \quad при \quad y \le 0, \qquad (6)$$

и

$$2a + b_x - c_y \ge 0 \quad при \quad y \le 0. \qquad (7)$$

Легко проверить, что неравенство (6) выполняется при любых $a(x,y)$, а неравенство (7) после подстановки функций $b(x,y)$ и $c(x,y)$, заданных по формуле (3) примет вид:

$$\sqrt{-K} a_x + a_y + a\frac{K'}{2K} F(y) \le 0. \qquad (8)$$

Теперь положим, аналогично работе [6]

$$a = \begin{cases} e^{-\beta x}, & y \le 0, \\ e^{-\beta x} \cos \gamma y, & y \ge 0, \end{cases}$$

где $\gamma,\ \beta$ − положительные постоянные. Подставляя функцию $a(x,y)$ в интегралы I_1 и I_3 получим

$$I_1 + I_3 = e^{-\beta x} \left[\int\limits_{\gamma_{12}} \left(-\sqrt{-K}\beta + \frac{K'}{4K} \right) v^2 dx + \int\limits_{\gamma_{22}} \left(-\sqrt{-K}\beta - \frac{K'}{4K} \right) v^2 dx - 4\int\limits_{\gamma_{12}} \frac{aK}{K'(y)} (\sqrt{-K} v_x - v_y)^2 dx \right]$$

Выберем $\gamma = \dfrac{\pi}{2y_m}$, а β настолько большое, чтобы сумма интегралов $I_1 + I_3$ была неположительна и выполнялось неравенство (7). Легко убедиться, что интеграл $I_6 \le 0$.

Отсюда можно сделать вывод, что поскольку сумма интегралов $I_1, I_2, ..., I_6$ равна нулю, то, в частности, и интеграл $I_4 = 0$, откуда получим, что $v(x,y) = 0$ в D^+, в частности, $v(x,0) = 0$ и $\frac{\partial v(x,0)}{\partial y} = 0$, а тогда из единственности решения задачи Коши $v(x,y) \equiv 0$ в D_-. В итоге, получим $v(x,y) \equiv 0$ в области D.

Список литературы

1. Сабитов К. Б., Акимов А. А. К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа / Известия ВУЗов.Математика. 2001№ 10. С.73 − 80.
2. Сабитов К.Б. О задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина / Докл. РАН. 1994. Т.335, №4. С. 430-432.
3. Сабитов К.Б. О спектре одной газодинамической задачи Франкля для уравнений смешанного типа / Докл. АН СССР. 1991. Т.316, №1. С. 40-44.
4. A.A. Akimov, On uniqueness Morawetz problem for the Chaplygin equation, IJPAM, 97, No. 3 (2014), 369-375.
5. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Задача типа Трикопи с двумя линиями сопряжения / Научный обозреватель. 2015. № 12. С. 59-64.
6. Protter M.H. Uniqueness theorems for the Tricomi problem / J. Rational Mech. and Analysis. Part I, 2, 1. 1953. P.107 – 114.
7. Акимов А.А., Чернов И.Г. Построение решения задачи Моравец для уравнения Трикоми в специальной области / Высшая школа. 2015. № 21. С. 33-39.
8. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. К вопросу о существовании задачи Моравец для уравнения Трикоми / Журнал научных и прикладных исследований. 2015. № 11. С. 153-155.