Физико-математические науки

УДК 517.95

Акимов Андрей Анатольевич

кандидат физико-математических наук,

Стерлитамакский филиал БашГУ

Абдуллина Руфина Игоревна

магистр, Стерлитамакский филиал БашГУ

Akimov A. A.

Bashkir state university Sterlitamak branch

Abdullina R. I.

Bashkir state university Sterlitamak branch

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА-ГРИНА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация: В работе рассматривается история возникновения функции Римана-Грина. Приведен метод, впервые использованный Риманом при решении некоторых краевых задач для уравнений в частных производных гиперболического типа путем сравнения двух решений, построенных разными способами.

Ключевые слова: функция Римана-Грина, задача Коши, преобразование Фурье.

Summary: The paper deals with the history of the Riemann-Green's function. The article presents a method first used by Riemann in solving some boundary value problems for partial differential equations of hyperbolic type by comparing the two solutions, constructed in different ways.

Keywords: problem of Cauchy, Riemann-Green function, Fouier cosine transform.

Первое решение задачи Коши в общем виде для дифференциальных уравнений в частных производных было построено Риманом почти сто лет тому назад в своей известной статье [1] «О распространении звуковых волн конечной амплитуды». Несмотря на то, что решение было построено только для некоторых специальных уравнений, методы построения решения, рассмотренные в статье Римана, могли быть применимы к любому линейному уравнению гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными. В конечном счете, все эти методы [2], [3], [4] сводились к нахождению вспомогательной функции, которую часто называют функцией Римана-Грина и которая является решением задачи Гурса для сопряженного уравнения. Риман дал явные формулы для этой вспомогательной функции в двух случаях, имеющих особое значение в газовой динамике.Хотя полное описание метода в общем виде было дано ранее Дарбу [2], Риманом был достигнут определенный прогресс в плане построения функции Римана-Грина. Работы, посвященные построению функции Римана-Грина, часто довольствуются либо указанием и проверкой выражения для функции Римана-Грина в одном или двух случаях, либо нахождением этой функции в особых случаях, вдохновленные предположением относительно ее формы. Рассмотрим общие рассуждения при построении функции Римана-Грина на одном примере.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (1)$$

$$U|_{y=y_0}=0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=y_0}=F(x), \qquad (2)$$

где α, β, y_0 произвольные постоянные. Решение поставленной задачи будет иметь вид

$$U(X,Y)=\frac{1}{2}\int_{X-Y+y_0}^{X+Y-y_0}R(x,y_0;X,Y)F(x)\,dx$$

Если мы бы смогли решить эту проблему некоторым другим методом, сравнение двух решений позволило бы получить функцию Римана-Грина $R(x,y_0;\ X,Y)$ в случае, когда x лежит между $X\ \pm\ (Y-y_0)$. Поскольку y_0 произвольная постоянная, то можно будет определить $R(x,y;\ X,Y)$ при $X-x$ лежащим между $\pm(Y-y)$. Аналогично, если данные Коши будут

$$U|_{x=x_0}=0,\ \ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0}=G(y),$$

где x_0 произвольная постоянная, то решение будет иметь вид

$$U(X,Y)=\frac{1}{2}\int_{Y-X+x_0}^{Y+X-x}R(x_0,y;X,Y)G(y)\,dy.$$

И в этом случае, если решение возможно найти каким-нибудь другим способом, то сравнивая эти два решения можно найти $R(x\,,y;\ X,Y)$, когда $Y-y$ лежит между $\pm(X-x)$. Это справедливо, поскольку (a) решение задачи Коши единственно, и (b) функция Римана-Грина не зависит от формы кривой, на которой заданы условия Коши.

Уравнения, которые получаются в результате разделения переменных, имеют вид

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{d\vartheta}{dx}+\lambda^2\vartheta=0,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{d\varphi}{dy}+\lambda^2\varphi=0.$$

Решениями этих уравнений являются

$$\varphi_1=y^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}(\lambda x),\qquad \varphi_2=y^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}(\lambda x),\ \ W''=\frac{2cos\pi\beta}{\pi x^{2\beta}},$$

$$\vartheta_1 = x^{\frac{1}{2}-\alpha} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x), \qquad \vartheta_2 = x^{\frac{1}{2}-\alpha} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x), \qquad W' = \frac{2cos\pi\alpha}{\pi x^{2\alpha}},$$

где $J(\cdot)$ – функция Бесселя, а W', W'' - определители Вронского соответствующей системы функций.

Будем считать, что x, y, X, Y принимают положительные значения, что соответствует решению уравнения в первой четверти. Следуя работе [6], положим

$$\bar{\vartheta}_1(x,\lambda) = \lambda x^{\alpha+\frac{1}{2}} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x),$$

Поэтому, если $\beta - 1/2$ не является целым числом, то рассмотрим интеграл

$$\pm\frac{\pi}{cos\pi\beta}\frac{x^{\alpha+\frac{1}{2}}y^{\beta+\frac{1}{2}}}{X^{\alpha-\frac{1}{2}}Y^{\beta-\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda x)J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda X)\left\{J_{\beta-\frac{1}{2}}(\lambda y)J_{\frac{1}{2}-\beta}(\lambda Y)\right\}d\lambda, (11)$$

который является функцией Римана-Грина $V(x, y;\ X, Y)$, когда $X - x$ лежит между $\pm(Y - y)$. В остальных случаях функция тождественно равна нулю.

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся следующим результатом из теории преобразований Фурье: если

$$F(u) = \int_0^{\infty} f(\lambda) cos\lambda u d\lambda,$$

$$G(u) = \int_0^{\infty} g(\lambda)\sin\lambda u\, d\lambda,$$

то

$$\int_0^{\infty}\lambda f(\lambda)g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} F(u)dG(u).$$

Последний интеграл является интегралом Стилтьеса, так как функция $G\ (u)$ в нашей задаче разрывная.

Если мы положим

$$f(\lambda) = \pm\left\{J_{\beta-\frac{1}{2}}(\lambda y)J_{\frac{1}{2}-\beta}(\lambda Y) - J_{\frac{1}{2}-\beta}(\lambda y)J_{\beta-\frac{1}{2}}(\lambda Y)\right\},$$

где знак плюс или минус берется в зависимости от $Y > $ или $< y$, тогда

$$F(u) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi y Y}} \cos \pi\beta \, P_{-\beta}\left(\dfrac{y^2 + Y^2 - u^2}{2yY}\right), (0 < u < |Y - y|) \\ 0, \qquad (u > |Y - y|) \end{cases}$$

Если положить

$$g(\lambda) = J_{\alpha - \frac{1}{2}}(\lambda x) J_{\alpha - \frac{1}{2}}(\lambda X),$$

то как следует из работы [6] при $\alpha > 0$

$$G(u) = \begin{cases} 0, \quad 0 < u < |X - x| \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x X}} P_{\alpha - 1}\left(\dfrac{x^2 + X^2 - u^2}{2xX}\right), \quad |X - x| < u < X + x \\ \dfrac{\sin \alpha\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi^2 x X}} Q_{\alpha - 1}\left(\dfrac{u^2 - x^2 - X^2}{2xX}\right), \quad u > X + x \end{cases}$$

где $P(\cdot), Q(\cdot)$ – многочлены Лежандра, при этом $P_{-\alpha} = P_{\alpha - 1}$. Тогда получаем, что

$$\int_0^\infty \lambda f(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_0^{|Y - y|} F(u) dG(u).$$

Рассмотрим отдельно случаи $X > Y$ и $X < Y$. На рисунках 2 и 3, первая четверть разделена на части характеристиками $x \pm y = constant$. В области I и I', $|Y - y| < |X - x|$ функция $G(u)$ равна нулю и, поэтому интеграл (11) равен нулю.

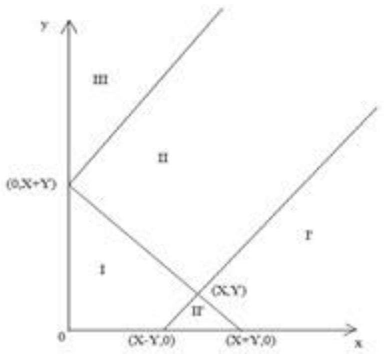

Рис.2

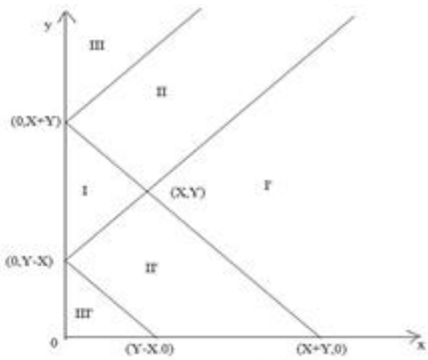

Рис.3

Это не означает, что функция V тождественно рана нулю. Пусть

$X > Y$, как изображено на рис. 2. Тогда в области II' имеем $-(Y-y) < X-x < Y-y$. Следовательно

$$\int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) g(\lambda) d\lambda = [F(u)G(u)]_{|X-x|-0}^{|X-x|+0} + \int_{|X-x|+0}^{|Y-y|} F(u) dG(u) =$$

$$= \frac{\cos \pi\beta}{\pi\sqrt{xXyY}} \left[P_{-\beta}\left(\frac{y^2+Y^2-(X-x)^2}{2yY}\right) \right.$$

$$\left. + \int_{|X-x|}^{Y-y} P_{-\beta} \frac{y^2+Y^2-(X-x)^2}{2yY} dP_{-\alpha} \frac{x^2+X^2-u^2}{2xX} = \right]$$

$$= \frac{\cos \pi\beta}{\pi\sqrt{xXyY}} \left[P_{-\beta}(1+\eta) + \int_0^{\pi/2} P_{-\beta}(1+\eta \cos^2 \vartheta) dP_{-\alpha}(1+\xi \sin^2 \vartheta) \right],$$

где

$$\xi = \frac{(X-x)^2-(Y-y)^2}{2xX}, \qquad \eta = \frac{(Y-y)^2-(X-x)^2}{2yY}.$$

Делая замену

$$u^2 = (X-x)^2 \cos^2\vartheta + (Y-y)^2 \sin^2 \vartheta,$$

получаем при $X > Y$

$$R(x,y;X,Y) = \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{X^{\alpha} Y^{\beta}} \left[P_{-\beta}(1+\eta) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{-\beta}(1+\eta \cos^2 \vartheta)\, dP_{-\alpha}(1+\xi \sin^2 \vartheta) \right]$$

в области II'. Так как ξ и η обращаются в нуль на характеристиках, проходящих через точку (X,Y), то построенная функция, очевидно, удовлетворяет граничным условиям.

Рассмотрим теперь область III ($|x-X| < x+X < y-Y$). Тогда

$$R(x,y;X,Y) = [F(u)G(u)]_{|X-x|-0}^{|X-x|+0} + \int_{|X-x|+0}^{|X-x|-0} F(u) dG(u) + [F(u)G(u)]_{|X-x|-0}^{|X-x|+0} +$$

$$+ \int_{X+x+0}^{y-Y} F(u) dG(u)$$

Сложность в данном случае заключается в том, что $G(u)$ стремится к бесконечности при $u \to X + x \pm 0$, что делает результирующую формулу более сложной.

Другую форму функции Римана-Грина для уравнения (1) была предложена в работе [2],

$$R(x, y; X, Y) = \left(\frac{x}{X}\right)^{\alpha} \left(\frac{y}{Y}\right)^{\beta} F_3\left(\alpha, \beta, 1-\alpha, 1-\beta; 1; -\frac{R^2}{4xX}, \frac{R^2}{4yY}\right),$$

где

$$R^2 = (x - X)^2 - (y - Y)^2$$

и F_3 обозначает гипергеометрическую функцию Аппеля.

Список литературы

1. Riemann: Abh. d. Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen 8 (1860), reprinted in Collected Works of Bernard Riemann, pp. 156-175. Dover Press 1953.
2. Hadamard J. / Bull. Soc, mat. de France. 1903. Vo1. 31, N 3. P. 208-224.
3. Darboux: Lecons sur la Theorie des Surfaces, vol. II, pp. 7 1 - 1ll . Paris 1915.
4. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений /Дифференц. уравнения. -1990. -Т. 26. -N 6. - С.1023-1032.
5. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. Задачи Дарбу для вырождающегося гиперболического уравнения / Дифференц. уравнения и их приложения в физике. Сб. тр. Стерлитамакского филиала АН РБ. - Стерлитамак, 1999. - С.68-82.
6. Сабитов К.Б., Акимов А.А. К теории аналога задачи Неймана для уравнений смешанного типа / Изв. вузов. Математика. 2001. № 10. С. 73-80.
7. Акимов А.А К истории построения функции Римана-Грина / Высшая школа. 2016. № 18. С. 57-59.
8. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Решение задачи Дарбу для телеграфного уравнения с отходом от характеристики / Вестник

Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 29-35.

9. Акимов А. А. Об одной теореме единственности решения задачи Моравец /Альманах современной науки и образования. 2010. № 12. С. 67-69.
10. Чернов И.Г., Акимов А.А. Построение функции Римана-Адамара задачи Дарбу для телеграфного уравнения / Сборник научных трудов Sworld. 2014. Т.29. №4. С.48-50.
11. Вильдяева А.А., Абдуллина Р.И., Акимов А.А. Построение задачи Коши методом Римана для одного гиперболического уравнения / Приволжский научный вестник. 2015. №5-1 (45). С.5-8.