Секция: Физико-математические науки

САЛИКОВ ВАЛЕНТИН АЛЕКСАНДРОВИЧ

Канд. техн. наук , доцент кафедры АСОИ

Днепропетровский национальный университет

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОЦЕНОК ВЫБОРА НА НЕСОГЛАСОВАННЫХ МАТРИЦАХ СУБЪЕКТИВНЫХ СУЖДЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрены причины появления погрешностей при проведении вычислений согласно методу анализа иерархий. Предложены способы улучшения степени согласованности матриц парных сравнений, обеспечивающие достоверный выбор.

Ключевые слова: альтернатива, матрица субъективых суждений, вектор приоритетов, собственное число матрицы, транзитивность, выбор, парные сравнения, критерий предпочтения.

Для решения задачи выбора наилучшей альтернативы из представленного множества объектов по совокупности многих критериев используют метод трехуровневой иерархии: «альтернативы – критерии – цель выбора» [1]. Наиболее важным ингредиентом теории выбора являются процедуры парных сравнений на нижнем уровне иерархии (уровне альтернатив) и вышестоящим среднем уровне критериев.

При проведении парных сравнений получаются отношения $\omega_i / \omega_j = a_{ij}$ (i,j $= 1,\bar{n}$), выражающее предпочтения i-того элемента над j-ым по какому-либо критерию или по степени достижения цели выбора. В результате образуется обратно симметричная матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, обладающая следующими свойствами:

1) если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$; 2) если $\omega_i = \omega_j$, то $a_{ij} = a_{ji} = 1$.

Матрица А считается согласованной, т.е. удовлетворяет требованию транзитивности предпочтений, если выполняется соотношение:

$$a_{ij} * a_{ik} = \frac{\omega_i}{\omega_j} * \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{\omega_i}{\omega_k} = a_{ik} \qquad (1)$$

Нетранзитивность предпочтений на практике является, как отмечается в [1], следствием естественной субъективности суждений, а не результатом ошибок и заблуждений. Для согласованной матрицы А размерности $n \times n$ собственное значение $\lambda = n$ и удовлетворяется условие: $\mathbf{A}\overline{\omega} = n * \overline{\omega}$, где $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, .., \omega_i, .., \omega_n)$ - собственный вектор (приоритетов).

На практике при проведении парных сравнений вследствие неполноты знаний ЛПР, нечеткости представления информации, недостаточной степени уверенности ЛПР субъективные суждения нарушают условие (1), матрица А возмущается и принимает вид A' так, что

$$A'\overline{x} = \lambda_{\max}\overline{x}, \qquad (2)$$

где $\overline{x}$ - вектор приоритетов матрицы субъективных суждений A'; $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы A'. По мере улучшения оценок $a_{ij} \to \omega_i / \omega_j$ собственное значение $\lambda_{\max} \to n$, а матрица A' принимает согласованную форму А.

Мерой согласованности матрицы субъективных суждений A' считают величину

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, n \geq 3 \qquad (3)$$

Для проведения парных сравнений и составления матрицы А используют шкалу отношений Вебера «1-9». При ее использовании величина a_{ij} может принимать значения в диапазоне от $1/9$ до 9 ($a_{ij} \neq 0$) [1]. Средний случайный индекс согласованности СИС обратно симметричной матрицы порядка $n \times n$, сгенерированной случайным образом по шкале «1-9», может принимать значения, приведенные в таблице 1:

Таблица 1

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
СИС	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54

Отношение ОС=$^{ИС}/_{СИС}$ называют средним отношением согласованности. Принято считать, что качество суждений в матрице А приемлемо, если ОС$\le$10% [1].

Известны несколько методов повышения согласованности матриц парных сравнений: 1) путем структурной декомпозиции исходной матрицы на подматрицы меньшей размерности с выделением и коррекцией тех из них, для которых ОС$\le$10% [3]; 2) путем дискретной минимизации отношения несогласованности данных [3]; 3) путем применения итерационной процедуры до получения стабильного вектора приоритетов [2]; 4) путем усреднения логарифмов оценок до получения сверхтранзитивной матрицы с отношением ОС = 0% [2]. С вычислительной точки зрения последняя процедура представления наиболее эффективной.

Для получения сверхтранзитивной матрицы А элементы исходной матрицы A' логарифмируются так, что образуют матрицу $D=\|d_{ij}\|$, где $d_{ij}=\log_s a_{ij}$. Ясно, что $d_{ij}=-d_{ji}$, а формула (1) принимает аддитивный вид: $d_{ij}+d_{jk}=d_{ik}$. Для каждого $l\in A$строят матрицу $D^l=\|d_{ij}^l\|$, полагая $d_{ij}=d_{il}+d_{lj}$. Полученное множество N матриц суммируют и усредняют: $D=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}D^l$, где $D=\|d_{ij}\|$. Путем обратного преобразования находят сверхтранзитивную матрицу $A=\|\alpha_{ij}\|$, где

$$a_{ij}=S^{d_{ij}} \tag{4}$$

Для вычисления вектора приоритетов $\overline{X}$ и собственного числа $\lambda_{\max}$ матрицы парных сравнений А можно использовать точные, но весьма громоздкие, и более простые приближенные методы [4,5]. Наиболее эффективный из приближенных методов заключается в следующем.

Определяется произведение элементов k-той строки матрицы А: $b_k = \prod_{j=1}^{n} a_{kj}$.

Искомый вектор приоритетов $\overline{X}$ определяется по формуле:

$$x_k = \frac{\sqrt[n]{b_k}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{b_i}} \qquad (5)$$

Путем умножения матрицы А справа на полученную оценку вектора приоритетов $\overline{X}$ находят новый вектор $\overline{Y}$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Приближенное максимальное собственное значение

$$\lambda_{\max} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i / x_i \qquad (7)$$

Общая процедура выбора наилучшей альтернативы из предложенного множества в случае трехуровневой иерархии состоит из следующих шагов: 1.Определяется цель выбора. 2. Формируется список из n критериев, отображающих совокупность предпочтений ЛПР при выборе на втором (среднем) уровне иерархии. 3. Определяется список из m альтернатив, предъявленных для выбора на нижнем уровне иерархии. 4. Путем попарного сравнения критериев ЛПР субъективно оценивает по шкале «1-9» степень достижения цели и формирует матрицу А размерности $n \times n$. 5. По формулам (5)-(7) определяется вектор приоритетов $\overline{X}$ и число $X_{\max}$; по формуле (3) и таблице 1 устанавливается оценка согласованности ОС матрицы А. 6. По каждому критерию ЛПР попарно сравнивает все предъявленные ему альтернативы и формирует n матриц A_i размерности $m \times m$, отображающих субъективные суждения ЛПР по шкале «1-9». 7. Для каждой из n полученных матриц A_i рассчитываются по (3), (5)-(7) векторы локальных приоритетов $\overline{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$ и оценки согласованности $\text{ОС}_i (i = \overline{1, m})$. 8. Образуют обобщенную матрицу $\overline{X}_{\sum}$ размерности $m \times n$ из совокупности векторов локальных приоритетов $\overline{X}^{(i)} (i = \overline{1, n})$. 9. Умножением матрицы $\overline{X}_{\sum}$ на вектор локальных приоритетов $\overline{X}$ второго (критериального) уровня иерархии, получают вектор глобальных приоритетов $\overline{Z}$:

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots. & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots. & x_2^{(n)} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ x_m^{(1)} & x_m^{(2)} & \ldots. & x_m^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots. \\ z_m \end{bmatrix} \qquad (8)$$

10. Выполнив операцию $Z_{\max} = \max(z_1, z_2, .., z_j, .., z_m)$, выбирают j-тую альтернативу, наилучшим образом удовлетворяющую ЛПР по совокупности его предпочтений. Элементы вектора глобальных приоритетов $\overline{Z}$ можно ранжировать по величине, т.е. построить целочисленный вектор

$$\begin{Bmatrix} \overline{R} = (r_1, r_2, .., r_j, .., r_m) \\ \overline{Z} = (z_1, z_2, .., z_j, .., z_m) \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

элементы которого ассоциированы с оценками вектора глобальных приоритетов так, что для $Z_j = Z_{\max} (j = \overline{1, m})$ ранг $r_j = m$, т.е. наивысший, а для $Z_k = Z_{\min} (k = \overline{1, m})$ ранг $r_k = m$, т.е. наинизший. Достаточно очевидно, что ранговое упорядочивание элементов $\overline{Z}$ позволяет ЛПР судить об эффективности достижения поставленной цели альтернативами, участвующими в процедуре выбора.

При осуществлении выбора на несогласованных матрицах суждений $A^{'}$ и $A_i^{'} (i = \overline{1, n})$ вектор глобальных приоритетов $\overline{Z}^{'}$, будет, очевидно, отличаться от вектора $\overline{Z}$ (8), полученного на согласованных матрицах A и A_i. Кроме того, может измениться и вектор рангов $\overline{R}$ (9). Вследствие этого, ЛПР может справедливо выразить недоверие к результатам выбора. Качество и достоверность выбора зависят от величины ошибок оценок

$$\Delta\overline{Z} = \left|\overline{Z} - \overline{Z}^{'}\right| = (\Delta z_1, \Delta z_2, ..., \Delta z_j, ..., \Delta z_m) \qquad (10)$$

и устойчивости (неизменности) векторов рангов $\overline{R}$. Если по мере согласования матриц суждений ошибки $\Delta z_j \to 0$, а вектор рангов $\overline{R}$ стабилизируется (особенно, компонента с наивысшим рангом), то качество выбора можно считать высоким и довериться его результатам.

Рассматриваемая задача не может быть решена в общем виде и имеет многофакторный характер. Исследование можно провести путем численного моделирования на ПК для ограниченного числа учитываемых, но наиболее значимых факторов. Наибольший интерес для анализа представляет случай слабо различимых альтернатив, когда компоненты вектора Z отличаются на величину, сравнимую с ошибками вычислений.

В процессе моделирования выполнены следующие эксперименты: 1) матрицы A и A_i сверхтранзитивны; 2) матрицы A и A_i согласованы до приемлемого уровня $OC \le 10\% (i = \overline{1,n})$; 3) матрица A согласована плохо ($OC \ge 10\%$), а матрицы A_i сверхтранзитивны; 4) матрица А сверхтранзитивна, а все матрицы A_i согласованы плохо ($OC \ge 10\%$); 5) матрицы A и $A_i (i = \overline{1,n})$ согласованы плохо.

Для проведения экспериментов принято n=8 и m=6. Результаты численного моделирования приведены в таблице 2.

Таблица 2

N экспе-рим.	Парамет-ры реше-ния	Полученные векторы $\overline{Z}, \overline{R}, \Delta\overline{Z}$					
I	OC	OC=0%, OC_1=0%, OC_2=0%, OC_3=0%, OC_4=0%, OC_5=0%, OC_6=0%					
	J	1	2	3	4	5	6
	$\overline{z}$	0,1637	0,1666	0,1696	0,1705	0,1629	0,1666
	$\overline{r}$	5	4	2	1	6	3
	$\Delta\overline{z}$	0	0	0	0	0	0
II	OC	OC=10%, OC_1=10%, OC_2=10%, OC_3=10%,					

		OC_4=10%, OC_5=10%, OC_6=10%					
	J	1	2	3	4	5	6
	$\bar{z}$	0,1638	0,1667	0,1697	0,1707	0,1630	0,1667
	$\bar{r}$	5	4	2	1	6	3
	$\Delta\bar{z}$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
III	OC	OC=50%, OC_1=0%, OC_2=0%, OC_3=0%, OC_4=0%, OC_5=0%, OC_6=0%					
	J	1	2	3	4	5	6
	$\bar{z}$	0,1631	0,1689	0,1731	0,1705	0,1599	0,1644
	$\bar{r}$	5	3	1	2	6	4
	$\Delta\bar{z}$	0,0006	0,0023	0,0034	0,0000	0,0029	0,0022
IV	OC	OC=0%, OC_1=50%, OC_2=50%, OC_3=50%, OC_4=50%, OC_5=50%, OC_6=50%					
	J	1	2	3	4	5	6
	$\bar{z}$	0,1636	0,1724	0,1778	0,1715	0,1581	0,1632
	$\bar{r}$	4	2	1	3	6	5
	$\Delta\bar{z}$	0,0024	0,0058	0,0082	0,0012	0,0070	0,0056
V	OC	OC=50%, OC_1=50%, OC_2=50%, OC_3=50%, OC_4=50%, OC_5=50%, OC_6=50%					
	J	1	2	3	4	5	6
	$\bar{z}$	0,1625	0,1713	0,1767	0,1704	0,1570	0,1621
	$\bar{r}$	4	2	1	3	6	5
	$\Delta\bar{z}$	0,0013	0,0047	0,0071	0,0001	0,0059	0,0045

Выводы:

1. Результаты выбора альтернатив по методу трехуровневой иерархии существенно зависят от степени согласованности матриц попарных сравнений. В случае слабо различимых альтернатив возможны отклонения рангов оценок относительно достоверных результатов.

2. Для хорошо согласованных матриц ($OC \leq 10\%$) результаты выбора можно считать практически достоверными.

Литература

1. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий.- М.: Радио и связь, 1993.
2. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора.- М.: Наука, 1974.
3. Харитонов Е.В. Теоретическое обобщение и развитие методов принятия решений.- Смоленск: ВУ ВПВО СВ РФ, 1999
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.- М.: Наука, 1996.
5. Саликов В.А. Анализ влияния погрешностей вычисления собственных векторов на качество выбора методом анализа иерархий – “INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL ”/ Сборник научных статей, вып. 2, том 2 - Киев, 2016, с. 88-89.